

2000 普通高等学校招生考试 (旧课程卷理)

一、选择题

1. 设集合 A 和 B 都是自然数集 \mathbf{N} , 映射 $f: A \rightarrow B$ 把集合 A 中的元素 n 映射成集合 B 中的元素 $2^n + n$, 则在映射 f 下, 象 20 的原象是 ()

- (A) 2 (B) 3 (C) 4 (D) 5

2. 在复平面内, 把复数 $3 - \sqrt{3}i$ 对应的向量按顺时针方向旋转 $\frac{\pi}{3}$, 所得向量对应的复数是 ()

- (A) $2\sqrt{3}$ (B) $-2\sqrt{3}i$ (C) $\sqrt{3} - 3i$ (D) $3 + \sqrt{3}i$

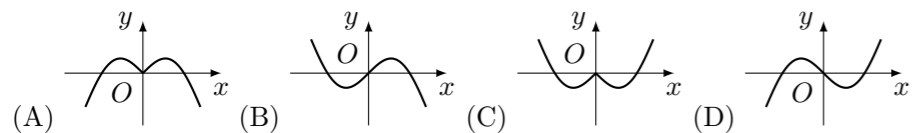
3. 一个长方体共一顶点的三个面的面积分别是 $\sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{6}$, 这个长方体对角线的长是 ()

- (A) $2\sqrt{3}$ (B) $3\sqrt{2}$ (C) 6 (D) $\sqrt{6}$

4. 已知 $\sin \alpha > \sin \beta$, 那么下列命题成立的是 ()

- (A) 若 α, β 是第一象限角, 则 $\cos \alpha > \cos \beta$
 (B) 若 α, β 是第二象限角, 则 $\tan \alpha > \tan \beta$
 (C) 若 α, β 是第三象限角, 则 $\cos \alpha > \cos \beta$
 (D) 若 α, β 是第四象限角, 则 $\tan \alpha > \tan \beta$

5. 函数 $y = -x \cos x$ 的部分图象是 ()



6. 《中华人民共和国个人所得税法》规定, 公民全月工资、薪金所得不超过 800 元的部分不必纳税, 超过 800 元的部分为全月应纳税所得额, 此项税款按下表分段累进计算:

全月应纳税所得额	税率
不超过 500 元的部分	5%
超过 500 元至 2000 元的部分	10%
超过 2000 元至 5000 元的部分	15%
...	...

某人一月份交纳此项税款 26.78 元, 则他的当月工资、薪金所得介于 ()

- (A) 800 - 900 元 (B) 900 - 1200 元
 (C) 1200 - 1500 元 (D) 1500 - 2800 元

7. 若 $a > b > 1$, $P = \sqrt{\lg a \cdot \lg b}$, $Q = \frac{1}{2}(\lg a + \lg b)$, $R = \lg \left(\frac{a+b}{2}\right)$, 则

- (A) $R < P < Q$ (B) $P < Q < R$ (C) $Q < P < R$ (D) $P < R < Q$

8. 以极坐标系中的点 $(1, 1)$ 为圆心, 1 为半径的圆的方程是 ()

- (A) $\rho = 2 \cos \left(\theta - \frac{\pi}{4}\right)$ (B) $\rho = 2 \sin \left(\theta - \frac{\pi}{4}\right)$
 (C) $\rho = 2 \cos (\theta - 1)$ (D) $\rho = 2 \sin (\theta - 1)$

9. 一个圆柱的侧面展开图是一个正方形, 这个圆柱的全面积与侧面积的比是 ()

- (A) $\frac{1+2\pi}{2\pi}$ (B) $\frac{1+4\pi}{4\pi}$ (C) $\frac{1+2\pi}{\pi}$ (D) $\frac{1+4\pi}{2\pi}$

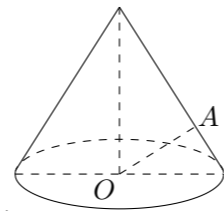
10. 过原点的直线与圆 $x^2 + y^2 + 4x + 3 = 0$ 相切, 若切点在第三象限, 则该直线的方程是 ()

- (A) $y = \sqrt{3}x$ (B) $y = -\sqrt{3}x$ (C) $y = \frac{\sqrt{3}}{3}x$ (D) $y = -\frac{\sqrt{3}}{3}x$

11. 过抛物线 $y = ax^2$ ($a > 0$) 的焦点 F 作一直线交抛物线于 P, Q 两点, 若线段 PF 与 FQ 的长分别是 p, q , 则 $\frac{1}{p} + \frac{1}{q}$ 等于 ()

- (A) $2a$ (B) $\frac{1}{2a}$ (C) $4a$ (D) $\frac{4}{a}$

12. 如图, OA 是圆锥底面中心 O 到母线的垂线, OA 绕轴旋转一周所得曲面将圆锥分成体积相等的两部分, 则母线与轴的夹角为 ()



- (A) $\arccos \frac{1}{\sqrt{2}}$ (B) $\arccos \frac{1}{2}$ (C) $\arccos \frac{1}{\sqrt{2}}$ (D) $\arccos \frac{1}{\sqrt{2}}$

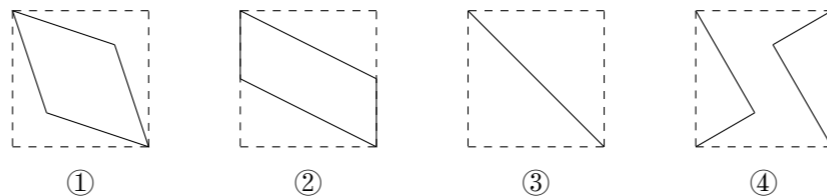
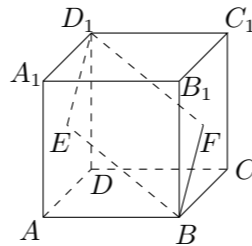
二、填空题

13. 乒乓球队的 10 名队员中有 3 名主力队员, 派 5 名参加比赛, 3 名主力队员要安排在第一、三、五位置, 其余 7 名队员选 2 名安排在第二、四位置, 那么不同的出场安排共有_____种 (用数字作答).

14. 椭圆 $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$ 的焦点 F_1, F_2 , 点 P 为其上的动点, 当 $\angle F_1PF_2$ 为钝角时, 点 P 横坐标的取值范围是_____.

15. 设 $\{a_n\}$ 是首项为 1 的正项数列, 且 $(n+1)a_{n+1}^2 - na_n^2 + a_{n+1}a_n = 0$ ($n = 1, 2, 3, \dots$), 则它的通项公式是 $a_n =$ _____.

16. 如图, E, F 分别为正方体面 ADD_1A_1 、面 BCC_1B_1 的中心, 则四边形 BFD_1E 在该正方体的面上的射影可能是_____. (要求: 把可能的图序号都填上)



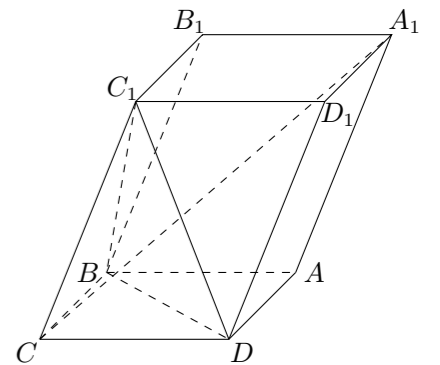
三、解答题

17. 已知函数 $y = \sqrt{3} \sin x + \cos x$, $x \in \mathbf{R}$.

- (1) 当函数 y 取得最大值时, 求自变量 x 的集合;
 (2) 该函数的图象可由 $y = \sin x$ ($x \in \mathbf{R}$) 的图象经过怎样的平移和伸缩变换得到?

18. 如图, 已知平行六面体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的底面 $ABCD$ 上菱形, 且 $\angle C_1CB = \angle C_1CD = \angle BCD = 60^\circ$.

- (1) 证明: $C_1C \perp BD$;
 (2) 假定 $CD = 2$, $CC_1 = \frac{3}{2}$, 记面 C_1BD 为 α , 面 CBD 为 β , 求二面角 $\alpha - BD - \beta$ 的平面角的余弦值;
 (3) 当 $\frac{CD}{CC_1}$ 的值为多少时, 能使 $A_1C \perp$ 平面 C_1BD ? 请给出证明.



19. 设函数 $f(x) = \sqrt{x^2 + 1} - ax$, 其中 $a > 0$.

(1) 解不等式 $f(x) \leq 1$;

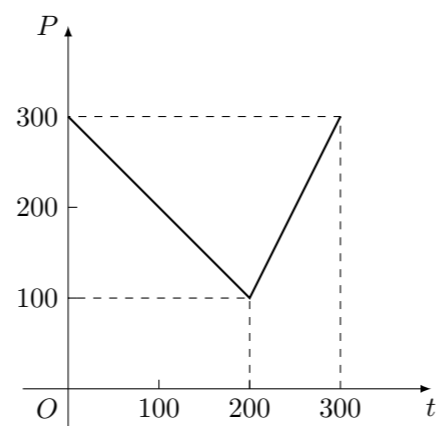
(2) 求 a 的取值范围, 使函数 $f(x)$ 在区间 $[0, +\infty)$ 上是单调函数.

21. 某蔬菜基地种植西红柿, 由历年市场行情得知, 从二月一日起的 300 天内, 西红柿市场售价与上市时间的关系用图一的一条折线表示; 西红柿的种植成本与上市时间的关系用图二的抛物线段表示.

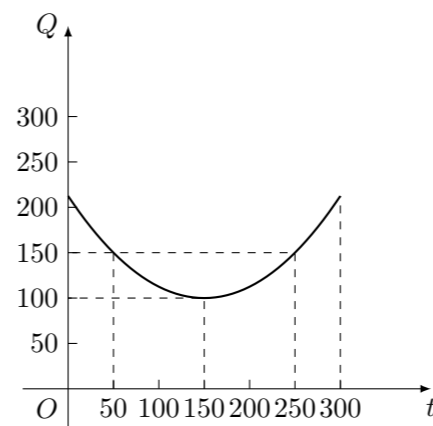
(1) 写出图一表示的市场售价与时间的函数关系式 $p = f(t)$; 写出图二表示的种植成本与时间的函数关系式 $Q = g(t)$;

(2) 认定市场售价减去种植成本为纯收益, 问何时上市的西红柿纯收益最大?

注: 市场售价各种植成本的单位: 元/ 10^2 kg, 时间单位: 天.



图一



图二

20. (1) 已知数列 $\{c_n\}$, 其中 $c_n = 2^n + 3^n$, 且数列 $\{c_{n+1} - pc_n\}$ 为等比数列, 求常数 p ;

(2) 设 $\{a_n\}, \{b_n\}$ 是公比不相等的两个等比数列, $c_n = a_n + b_n$, 证明数列 $\{c_n\}$ 不是等比数列.

22. 如图, 已知梯形 $ABCD$ 中 $|AB| = 2|CD|$, 点 E 分有向线段 \overrightarrow{AC} 所成的比为 λ , 双曲线过 C, D, E 三点, 且以 A, B 为焦点, 当 $\frac{2}{3} \leq \lambda \leq \frac{3}{4}$ 时, 求双曲线离心率 e 的取值范围.

