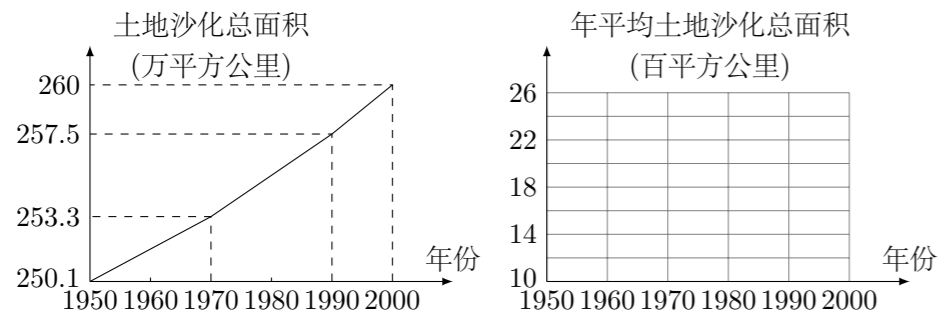


2001 普通高等学校招生考试 (上海卷理)

一、填空题

1. 设函数 $f(x) = \begin{cases} 2^{-x}, & x \in (-\infty, 1], \\ \log_{81}x, & x \in (1, +\infty), \end{cases}$ 则满足 $f(x) = \frac{1}{4}$ 的 x 值为_____.
2. 设数列 $\{a_n\}$ 的通项为 $a_n = 2n - 7$ ($n \in \mathbf{N}$), 则 $|a_1| + |a_2| + \dots + |a_{10}| =$ _____.
3. 设 P 为双曲线 $\frac{x^2}{4} - y^2 = 1$ 上一动点, O 为坐标原点, M 为线段 OP 的中点, 则点 M 的轨迹方程为_____.
4. 设集合 $A = \{x \mid 2\lg x = \lg(8x-15), x \in \mathbf{R}\}$, $B = \{x \mid \cos \frac{x}{2} > 0, x \in \mathbf{R}\}$, 则 $A \cap B$ 的元素个数为_____个.
5. 抛物线 $x^2 - 4y - 3 = 0$ 的焦点坐标为_____.
6. 设数列 $\{a_n\}$ 是公比 $q > 0$ 的等比数列, S_n 是它的前 n 项和. $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = 7$, 则此数列的首项 a_1 的取值范围是_____.
7. 某餐厅供应客饭, 每位顾客可以在餐厅提供的菜肴中任选 2 荤 2 素共 4 种不同的品种. 现在餐厅准备了 5 种不同的荤菜, 若要保证每位顾客有 200 种以上不同的选择, 则餐厅至少还需要准备不同的素菜品种_____种. (结果用数值表示)
8. 在代数式 $(4x^2 - 2x - 5) \left(1 + \frac{1}{x^2}\right)^5$ 的展开式中, 常数项为_____.
9. 设 $x = \sin \alpha$, $\alpha \in \left[-\frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}\right]$, 则 $\arccos x$ 的取值范围为_____.
10. 直线 $y = 2x - \frac{1}{2}$ 与曲线 $\begin{cases} x = \sin \varphi, \\ y = \cos 2\varphi, \end{cases}$ (φ 为参数) 的交点坐标为_____.
11. 已知两个圆: $x^2 + y^2 = 1$ ①与 $x^2 + (y-3)^2 = 1$ ②, 则由①式减去②式可得上述两圆的对称轴方程. 将上述命题在曲线的情况下加以推广, 即要求得到一个更一般的命题, 而己知命题应成为所推广命题的一个特例, 推广的命题为_____.
12. 据报道, 我国目前已成为世界上受荒漠化危害最严重的国家之一. 下左图表示我国土地沙化总面积在上个世纪五六十年代、七八十年代、九十年代的变化情况. 由图中的相关信息, 可将上述有关年代中, 我国年平均土地沙化面积在下右图中图示为:



二、选择题

13. $a = 3$ 是直线 $ax + 2y + 3a = 0$ 和直线 $3x + (a-1)y = a-7$ 平行且不重合的 ()
(A) 充分非必要条件 (B) 必要非充分条件
(C) 充要条件 (D) 既非充分也非必要条件
14. 在平行六面体 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 中, M 为 AC 与 BD 的交点, 若 $\overrightarrow{A_1B_1} = \vec{a}$, $\overrightarrow{A_1D_1} = \vec{b}$, $\overrightarrow{A_1A} = \vec{c}$, 则下列向量中与 $\overrightarrow{B_1M}$ 相等的向量是 ()
(A) $-\frac{1}{2}\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b} + \vec{c}$ (B) $\frac{1}{2}\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b} + \vec{c}$
(C) $\frac{1}{2}\vec{a} - \frac{1}{2}\vec{b} + \vec{c}$ (D) $-\frac{1}{2}\vec{a} - \frac{1}{2}\vec{b} + \vec{c}$
15. 已知 a, b 为两条不同的直线, α, β 为两个不同的平面, 且 $a \perp \alpha, b \perp \beta$, 则下列命题中的假命题是 ()
(A) 若 $a \parallel b$, 则 $\alpha \parallel \beta$ (B) 若 $\alpha \perp \beta$, 则 $a \perp b$
(C) 若 a, b 相交, 则 α, β 相交 (D) 若 α, β 相交, 则 a, b 相交
16. 用计算器验算函数 $y = \frac{\lg x}{x}$ ($x > 1$) 的若干个值, 可以猜想下列命题中的真命题只能是 ()
(A) $y = \frac{\lg x}{x}$ 在 $(1, +\infty)$ 上是单调减函数
(B) $y = \frac{\lg x}{x}, x \in (1, +\infty)$ 的值域为 $\left(0, \frac{\lg 3}{3}\right]$
(C) $y = \frac{\lg x}{x}, x \in (1, +\infty)$ 有最小值
(D) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\lg n}{n} = 0, n \in \mathbf{N}$

三、解答题

17. 已知 a, b, c 是 $\triangle ABC$ 中 $\angle A, \angle B, \angle C$ 的对边, S 是 $\triangle ABC$ 的面积, 若 $a = 4, b = 5, S = 5\sqrt{3}$, 求 c 的长度.

18. 设 F_1, F_2 为椭圆 $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$ 的两个焦点, P 为椭圆上的一点. 已知 P, F_1, F_2 是一个直角三角形的三个顶点, 且 $|PF_1| > |PF_2|$, 求 $\frac{|PF_1|}{|PF_2|}$ 的值.

19. 在棱长为 a 的正方体 $OABC - O'A'B'C'$ 中, E, F 分别是棱 AB, BC 上的动点, 且 $AE = BF$.
(1) 求证: $A'E \perp C'F$;
(2) 当三棱锥 $B' - BEF$ 的体积取得最大值时, 求二面角 $B' - EF - B$ 的大小. (结果用反三角函数表示)

20. 对任意一个非零复数 z , 定义集合 $M_z = \{\omega \mid \omega = z^{2^n-1}, n \in \mathbf{N}\}$.
- (1) 设 a 是方程 $x + \frac{1}{x} = \sqrt{2}$ 的一个根, 试用列举法表示集合 M_a . 若在 M_a 中任取两个数, 求其和为零的概率 P ;
- (2) 设复数 $\omega \in M_z$, 求证: $M \subseteq M_z$.

21. 用水清洗一堆蔬菜上残留的农药, 对用一定量的水清洗一次的效果作如下假定: 用 1 个单位量的水可洗掉蔬菜上残留农药用量的 $\frac{1}{2}$, 用水越多洗掉的农药量也越多, 但总还有农药残留在蔬菜上. 设用 x 单位量的水清洗一次以后, 蔬菜上残留的农药与本次清洗前残留有农药量之比为函数 $f(x)$.
- (1) 试规定 $f(0)$ 的值, 并解释其实际意义;
- (2) 试根据假定写出函数 $f(x)$ 应该满足的条件和具有的性质;
- (3) 设 $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$, 现有 a ($a > 0$) 单位量的水, 可以清洗一次, 也可以把水平均分成 2 份后清洗两次. 试问用哪种方案清洗后蔬菜上的农药量比较少? 说明理由.

22. 对任意函数 $f(x), x \in D$, 可按图示构造一个数列发生器, 其工作原理如下:
- ① 输入数据 $x_0 \in D$, 经数列发生器输出 $x_1 = f(x_0)$;
- ② 若 $x_1 \notin D$, 则数列发生器结束工作; 若 $x_1 \in D$, 则将 x_1 反馈回输入端, 再输出 $x_2 = f(x_1)$, 并依此规律继续下去. 现定义 $f(x) = \frac{4x-2}{x+1}$.
- (1) 若输出 $x_0 = \frac{49}{65}$, 则由数列发生器产生数列 $\{x_n\}$. 请写出数列 $\{x_n\}$ 的所有项;
- (2) 若要数列发生器产生一个无穷的常数数列, 试求输出的初始数据 x_0 的值;
- (3) 若输出 x_0 时, 产生的无穷数列 $\{x_n\}$ 满足: 对任意正整数 n 均有 $x_n < x_{n+1}$, 求 x_0 的取值范围.

