2001年全国普通高等学校招生统一考试(新课程卷)

数学试卷(理工农医类)

本试卷分第Ⅰ卷(选择题)和第Ⅱ卷(非选择题)两部分。共150分。考试时间120分钟。

第Ⅰ卷(选择题共60分)

注意事项：

1. 答第Ⅰ卷前,考生务必将自己的姓名、准考证号、考试科目、试卷类型(A或B)用铅笔涂写在答题卡上。

2. 每小题选出答案后,用铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑,如需改动,用橡皮擦干净后,再选涂其他答案,不能答在试题卷上。

3. 考试结束,监考人将本试卷和答题卡一并收回。

参考公式：

如果事件A、B互斥,那么

$$P(A+B)=P(A)+P(B)$$

如果事件A、B相互独立,那么

$$P(A\cdot B)=P(A)\cdot P(B)$$

如果事件A在一次试验中发生的概率是P,那么n次独立重复试验中恰好发生k次的概率

$$P_n(k)=C_n^kP^k(1-P)^{n-k}$$

正棱锥、圆锥的侧面积公式

$$S_{锥侧}=\frac{1}{2}cl$$

其中c表示底面周长,l表示斜高或母线长

棱锥、圆锥的体积公式

$$V_{锥体}=\frac{1}{3}Sh$$

其中S表示底面积,h表示高

一、选择题：本大题共12小题,每小题5分,共60分。在每小题给出的四个选项中,只有一项是符合题目要求的。

(1) 函数$y=3\sin\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{3}\right)$的周期、振幅依次是 ( )

(A) 4π、3　　(B) 4π、-3　　(C) π、3　　(D) π、-3

(2) 若S_n是数列$\{a_n\}$的前n项和,且$S_n=n^2$,则$\{a_n\}$是 ( )

(A) 等比数列,但不是等差数列　　(B) 等差数列,但不是等比数列

(C) 等差数列,而且也是等比数列　　(D) 既非等比数列又非等差数列

(3) 过点$A(1,-1)$、$B(-1,1)$且圆心在直线$x+y-2=0$上的圆的方程是 ( )

(A) $(x-3)^2+(y+1)^2=4$　　(B) $(x+3)^2+(y-1)^2=4$

(C) $(x-1)^2+(y-1)^2=4$　　(D) $(x+1)^2+(y+1)^2=4$

(4) 若定义在区间$(-1,0)$内的函数$f(x)=\log_{2a}(x+1)$满足$f(x)>0$,则a的取值范围是 ( )

(A) $\left(0,\frac{1}{2}\right)$　　(B) $\left(0,\frac{1}{2}\right]$　　(C) $\left(\frac{1}{2},+\infty\right)$　　(D) $(0,+\infty)$

(5) 若向量 $a=(1,1)$，$b=(1,-1)$，$c=(-1,2)$，则 $c=$ ( )

(A) $-\frac{1}{2}a+\frac{3}{2}b$ (B) $\frac{1}{2}a-\frac{3}{2}b$ (C) $\frac{3}{2}a-\frac{1}{2}b$ (D) $-\frac{3}{2}a+\frac{1}{2}b$

(6) 设 A、B 是 x 轴上的两点，点 P 的横坐标为 2 且 $|PA|=|PB|$。若直线 PA 的方程为 $x-y+1=0$，则直线 PB 的方程是 ( )

(A) $x+y-5=0$ (B) $2x-y-1=0$ (C) $2y-x-4=0$ (D) $2x+y-7=0$

(7) 若 $0<\alpha<\beta<\frac{\pi}{4}$，$\sin\alpha+\cos\alpha=a$，$\sin\beta+\cos\beta=b$，则 ( )

(A) $a<b$ (B) $a>b$ (C) $ab<1$ (D) $ab>2$

(8) 函数 $y=1+3x-x^3$ 有 ( )

(A) 极小值 -1，极大值 1 (B) 极小值 -2，极大值 3

(C) 极小值 -2，极大值 2 (D) 极小值 -1，极大值 3

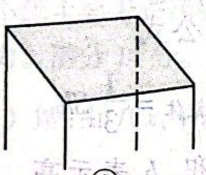
(9) 某赛季足球比赛的计分规则是：胜一场，得 3 分；平一场，得 1 分；负一场，得 0 分。一球队打完 15 场，积 33 分。若不考虑顺序，该队胜、负、平的情况共有 ( )

(A) 3 种 (B) 4 种 (C) 5 种 (D) 6 种

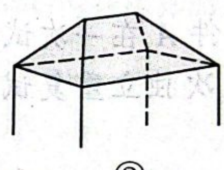
(10) 设坐标原点为 O，抛物线 $y^2=2x$ 与过焦点的直线交于 A、B 两点，则 $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=$ ( )

(A) $\frac{3}{4}$ (B) $-\frac{3}{4}$ (C) 3 (D) -3

(11) 一间民房的屋顶有如图三种不同的盖法：①单向倾斜；②双向倾斜；③四向倾斜。记三种盖法屋顶面积分别为 P_1、P_2、P_3。 ( )


①

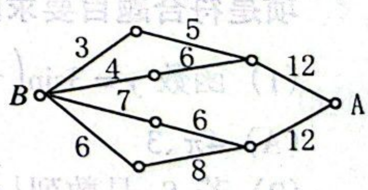

②


③

若屋顶斜面与水平面所成的角都是 α，则

(A) $P_3>P_2>P_1$ (B) $P_3>P_2=P_1$ (C) $P_3=P_2>P_1$ (D) $P_3=P_2=P_1$

(12) 如图，小圆圈表示网络的结点，结点之间的连线表示它们有网线相联。连线标注的数字表示该段网线单位时间内可以通过的最大信息量。现从结点 A 向结点 B 传递信息，信息可以分开沿不同的路线同时传递。则单位时间内传递的最大信息量是 ( )



(A) 26 (B) 24

(C) 20 (D) 19

第Ⅱ卷（非选择题共 90 分）

二、填空题：本大题共 4 小题，每小题 4 分，共 16 分，把答案填在题中横线上。

(13) 若复数 $z=\sqrt{2}+\sqrt{6}i$，则 $\arg\frac{1}{z}$ 等于________。

(14) 一个袋子里装有大小相同的 3 个红球和 2 个黄球。从中同时取出 2 个，则其中含红球个数的数学期望是________。(用数字作答)

(15) 在空间中，

① 若四点不共面，则这四点中任何三点都不共线。

② 若两条直线没有公共点，则这两条直线是异面直线。

以上两个命题中，逆命题为真命题的是________。(把符合要求的命题序号都填上)

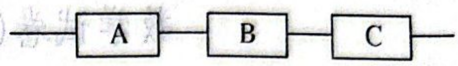
(16) 设$\{a_n\}$是公比为 q 的等比数列，S_n 是它的前 n 项和。若$\{S_n\}$是等差数列，则 $q=$ ________。

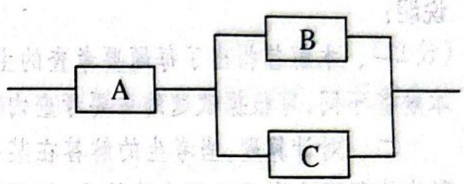
三、解答题：本大题共 6 小题，共 74 分。解答应写出文字说明，证明过程或演算步骤。

(17)（本小题满分 12 分）

解关于 x 的不等式$\frac{x-a}{x-a^2}<0(a\in\mathrm{R})$。

(18)（本小题满分 12 分）





如图，用 A、B、C 三类不同的元件连接成两个系统 N_1、N_2。当元件 A、B、C 都正常工作时，系统 N_1 正常工作；当元件 A 正常工作且元件 B、C 至少有一个正常工作时，系统 N_2 正常工作。已知元件 A、B、C、正常工作的概率依次为 0.80，0.90，0.90。分别求系统 N_1、N_2 正常工作的概率 P_1、P_2。

(19)（本小题满分 12 分）

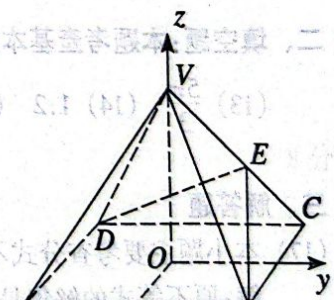
设 $a>0$，$f(x)=\frac{e^x}{a}+\frac{a}{e^x}$是 R 上的偶函数。

(Ⅰ) 求 a 的值；

(Ⅱ) 证明 $f(x)$在$(0,+\infty)$上是增函数。

注意：考生在(20 甲)、(20 乙)两题中选一题作答，如果两题都答，只以(20 甲)计分。

(20 甲)（本小题满分 12 分）

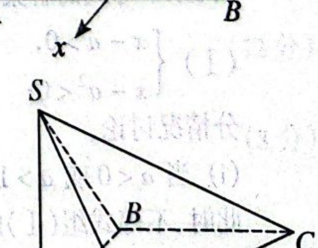


如图，以正四棱锥 $V-ABCD$ 底面中心 O 为坐标原点建立空间直角坐标系 $O-xyz$，其中 $Ox\parallel BC$，$Oy\parallel AB$。E 为 VC 中点，正四棱锥底面边长为 $2a$，高为 h。

(Ⅰ) 求 $\cos\langle\overrightarrow{BE},\overrightarrow{DE}\rangle$；

(Ⅱ) 记面 BCV 为α，面 DCV 为β，若$\angle BED$ 是二面角$\alpha-VC-\beta$ 的平面角，求$\angle BED$。

(20 乙)（本小题满分 12 分）



如图，在底面是直角梯形的四棱锥 $S-ABCD$ 中，$\angle ABC=90°$，$SA\perp$面 $ABCD$，$SA=AB=BC=1$，$AD=\frac{1}{2}$。

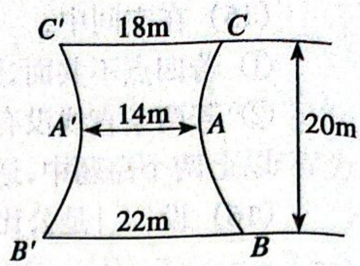
(Ⅰ) 求四棱锥 $S-ABCD$ 的体积；

(Ⅱ) 求面 SCD 与面 SBA 所成的二面角的正切值。

(21)（本小题满分 12 分）

某电厂冷却塔的外形是如图所示双曲线的一部分绕其中轴（即双曲线的虚轴）旋转所成的曲面，其中 A、A' 是双曲线的顶点，C、C' 是冷却塔上口直径的两个端点，B、B' 是下底直径的两

个端点，已知 $AA'=14\text{m}$，$CC'=18\text{m}$，$BB'=22\text{m}$，塔高 20m。



（Ⅰ）建立坐标系并写出该双曲线方程；

（Ⅱ）求冷却塔的容积（精确到 10m^3，塔壁厚度不计，π 取 3.14）。

(22)（本小题满分 14 分）

设 $0<\theta<\dfrac{\pi}{2}$，曲线 $x^2\sin\theta+y^2\cos\theta=1$ 和 $x^2\cos\theta-y^2\sin\theta=1$ 有 4 个不同的交点。

（Ⅰ）求 θ 的取值范围；

（Ⅱ）证明这 4 个交点共圆，并求圆半径的取值范围。

数学试卷（理工农医类）答案及评分标准

说明：

一、本解答指出了每题要考查的主要知识和能力，并给出了一种或几种解法供参考，如果考生的解法与本解答不同，可根据试题的主要考查内容比照评分标准制订相应的评分细则。

二、对计算题，当考生的解答在某一步出现错误时，如果后继部分的解答未改变该题的内容和难度，可视影响的程度决定后继部分的给分，但不得超过该部分正确解答应得分数的一半；如果后继部分的解答有较严重的错误，就不再给分。

三、解答右端所注分数，表示考生正确做到这一步应得的累加分数。

四、只给整数分数。选择题和填空题不给中间分。

一、选择题：本题考查基本知识和基本运算。每小题 5 分，满分 60 分。

(1) A (2) B (3) C (4) A (5) B (6) A (7) A (8) D (9) A (10) B

(11) D (12) D

二、填空题：本题考查基本知识和基本运算。每小题 4 分，满分 16 分。

(13) $\dfrac{5\pi}{3}$ (14) 1.2 (15) ② (16) 1

三、解答题

(17) 本小题主要考查分式不等式的解法，考查分类讨论的数学思想。满分 12 分。

解：原不等式的解集是下面不等式组（Ⅰ）、（Ⅱ）的解集的并集：

（Ⅰ）$\begin{cases}x-a>0,\\ x-a^2<0;\end{cases}$ （Ⅱ）$\begin{cases}x-a<0,\\ x-a^2>0。\end{cases}$ （2分）

分情况讨论。

(i) 当 $a<0$ 或 $a>1$ 时，有 $a<a^2$，

此时，不等式组（Ⅰ）的解集为 $\{x\mid a<x<a^2\}$，

不等式组（Ⅱ）的解集为空集 $\varnothing$； （6分）

(ii) 当 $0<a<1$ 时，有 $a^2<a$，

此时，不等式组（Ⅰ）的解集为空集 $\varnothing$，

不等式组（Ⅱ）的解集为 $\{x\mid a^2<x<a\}$； （10分）

(iii) 当 $a=0$ 或 $a=1$ 时，原不等式无解。

综上，当 $a<0$ 或 $a>1$ 时，原不等式的解集为 $\{x\mid a<x<a^2\}$；

当 $0<a<1$ 时,原不等式的解集为 $\{x \mid a^2<x<a\}$;

当 $a=0$ 或 $a=1$ 时,原不等式的解集为 $\varnothing$。 (12分)

(18) 本小题考查相互独立事件同时发生或互斥事件有一个发生的概率的计算方法,考查运用概率知识解决实际问题的能力。满分12分。

解:分别记元件 A、B、C 正常工作为事件 A、B、C,由已知条件

$$P(A)=0.80, P(B)=0.90, P(C)=0.90。$$

(Ⅰ)因为事件 A、B、C 是相互独立的,所以,系统 N_1 正常工作的概率

$$\begin{aligned} P_1 &= P(A\cdot B\cdot C) \\ &= P(A)\cdot P(B)\cdot P(C) \\ &= 0.80\times 0.90\times 0.90 = 0.648。\end{aligned}$$

故系统 N_1 正常工作的概率为 0.648。 (5分)

(Ⅱ)系统 N_2 正常工作的概率

$$P_2=P(A)\cdot[1-P(\bar{B}\cdot\bar{C})]=P(A)\cdot[1-P(\bar{B})\cdot P(\bar{C})],$$

$\because$ $P(\bar{B})=1-P(B)=1-0.90=0.10,$

$P(\bar{C})=1-P(C)=1-0.90=0.10,$ (10分)

$\therefore$ $P_2=0.80\times[1-0.10\times 0.10]=0.80\times 0.99=0.792。$

故系统 N_2 正常工作的概率为 0.792。 (12分)

(19) 本小题主要考查函数的奇偶性和单调性等基本性质,指数函数和不等式的基本性质和运算,以及综合分析问题的能力,满分12分。

(Ⅰ)解:依题意,对一切 $x\in\mathrm{R}$ 有 $f(x)=f(-x)$,即

$$\frac{e^x}{a}+\frac{a}{e^x}=\frac{1}{ae^x}+ae^x,$$

所以 $\left(a-\frac{1}{a}\right)\left(e^x-\frac{1}{e^x}\right)=0$ 对一切 $x\in R$ 成立。

由此得到 $a-\frac{1}{a}=0$,即 $a^2=1$。

又因为 $a>0$,所以 $a=1$。 (4分)

(Ⅱ)证明一:设 $0<x_1<x_2$,

$$\begin{aligned} f(x_1)-f(x_2) &= e^{x_1}-e^{x_2}+\frac{1}{e^{x_1}}-\frac{1}{e^{x_2}} \\ &= (e^{x_2}-e^{x_1})\left(\frac{1}{e^{x_1+x_2}}-1\right) \\ &= e^{x_1}(e^{x_2-x_1}-1)\cdot\frac{1-e^{x_2+x_1}}{e^{x_2+x_1}}, \end{aligned}$$ 8分

由 $x_1>0, x_2>0, x_2-x_1>0$,得 $x_1+x_2>0$,

$$e^{x_2-x_1}-1>0, 1-e^{x_2+x_1}<0。$$

$\therefore$ $f(x_1)-f(x_2)<0$,

即 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上是增函数。 (12分)

证明二:由 $f(x)=e^x+e^{-x}$ 得

$$f'(x)=e^x-e^{-x}=e^{-x}(e^{2x}-1)。$$ (8分)

当 $x\in(0,+\infty)$ 时,有 $e^{-x}>0, e^{2x}-1>0$,

此时 $f'(x)>0$。

所以 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上是增函数。 (12分)

注意:考生在(20甲)、(20乙)两题中选一题作答,如果两题都答,只以(20甲)计分。

(20甲) 本小题主要考查空间直角坐标的概念、空间点和向量的坐标表示以及两个向量夹角的计算方法;考查运用向量研究空间图形的数学思想方法。满分12分。

解:(Ⅰ)由题意知 $B(a,a,0), C(-a,a,0), D(-a,-a,0), E\left(-\frac{a}{2},\frac{a}{2},\frac{h}{2}\right)$,

由此得 $\overrightarrow{BE}=\left(-\frac{3a}{2},-\frac{a}{2},\frac{h}{2}\right),\overrightarrow{DE}=\left(\frac{a}{2},\frac{3a}{2},\frac{h}{2}\right)$，

$\therefore\ \overrightarrow{BE}\cdot\overrightarrow{DE}=\left(-\frac{3a}{2}\cdot\frac{a}{2}\right)+\left(-\frac{a}{2}\cdot\frac{3a}{2}\right)+\frac{h}{2}\cdot\frac{h}{2}=-\frac{3a^2}{2}+\frac{h^2}{4}$，

$|\overrightarrow{BE}|=|\overrightarrow{DE}|=\sqrt{\left(-\frac{3a}{2}\right)^2+\left(-\frac{a}{2}\right)^2+\left(\frac{h}{2}\right)^2}=\frac{1}{2}\sqrt{10a^2+h^2}$。 (3分)

由向量的数量积公式有

$$\cos\langle\overrightarrow{BE},\overrightarrow{DE}\rangle=\frac{\overrightarrow{BE}\cdot\overrightarrow{DE}}{|\overrightarrow{BE}|\cdot|\overrightarrow{DE}|}=\frac{-\frac{3a^2}{2}+\frac{h^2}{4}}{\frac{1}{2}\sqrt{10a^2+h^2}\cdot\frac{1}{2}\sqrt{10a^2+h^2}}=\frac{-6a^2+h^2}{10a^2+h^2}。$$ (6分)

(Ⅱ) 若$\angle BED$是二面角$\alpha-VC-\beta$的平面角，则$\overrightarrow{BE}\perp\overrightarrow{CV}$，即有

$$\overrightarrow{BE}\cdot\overrightarrow{CV}=0$$

又由 $C(-a,a,0),V(0,0,h)$，有$\overrightarrow{CV}=(a,-a,h)$，且$\overrightarrow{BE}=\left(-\frac{3a}{2},-\frac{a}{2},\frac{h}{2}\right)$，

$\therefore\ \overrightarrow{BE}\cdot\overrightarrow{CV}=-\frac{3a^2}{2}+\frac{a^2}{2}+\frac{h^2}{2}=0$，

即 $h=\sqrt{2}a$，这时有 (9分)

$$\cos\langle\overrightarrow{BE},\overrightarrow{DE}\rangle=\frac{-6a^2+h^2}{10a^2+h^2}=\frac{-6a^2+(\sqrt{2}a)^2}{10a^2+(\sqrt{2}a)^2}=-\frac{1}{3}。$$

$\therefore\ \angle BED=\langle\overrightarrow{BE},\overrightarrow{DE}\rangle=\arccos\left(-\frac{1}{3}\right)=\pi-\arccos\frac{1}{3}$。 (12分)

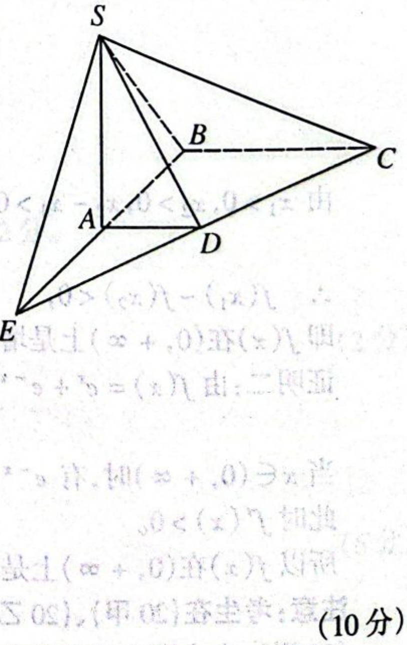
(20乙) 本小题主要考查线面关系和棱锥体积计算，以及空间想象能力和逻辑推理能力。满分12分。

解：(Ⅰ) 直角梯形 $ABCD$ 的面积是

$$M_{底面}=\frac{1}{2}(BC+AD)\cdot AB=\frac{1+0.5}{2}\times1=\frac{3}{4},$$ (2分)

$\therefore$ 四棱锥 $S-ABCD$ 的体积是

$$V=\frac{1}{3}\times SA\times M_{底面}=\frac{1}{3}\times1\times\frac{3}{4}=\frac{1}{4}$$ (4分)



(Ⅱ) 延长 BA、CD 相交于点 E，连结 SE，则 SE 是所求二面角的棱。 (6分)

$\because\ AD/\!/BC, BC=2AD$，

$\therefore\ EA=AB=SA$，$\therefore\ SE\perp SB$，

$\because\ SA\perp$面 $ABCD$，得面 $SEB\perp$面 EBC，EB 是交线，

又 $BC\perp EB$，$\therefore\ BC\perp$面 SEB，故 SB 是 CS 在面 SEB 上的射影，

$\therefore\ CS\perp SE$，

所以$\angle BSC$是所求二面角的平面角。 (10分)

$\because\ SB=\sqrt{SA^2+AB^2}=\sqrt{2}, BC=1, BC\perp SB$，

$\therefore\ \tan\angle BSC=\frac{BC}{SB}=\frac{\sqrt{2}}{2}$。

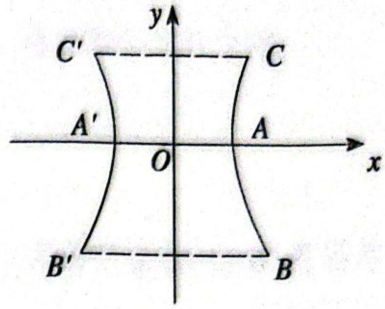
即所求二面角的正切值为$\frac{\sqrt{2}}{2}$。 (12分)

(21) 本小题考查选择适当的坐标系建立曲线方程和解方程组等基础知识，考查应用所学积分知识、思想和方法解决实际问题的能力。满分12分。

解：(Ⅰ)如图建立直角坐标系 xOy，AA'在x轴上，AA'的中点为坐标原点O，CC'与BB'平行于x轴。

设双曲线方程为$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$，则 $a=\frac{1}{2}AA'=7$。 (2分)

又设$B(11,y_1)$，$C(9,y_2)$，因为点B、C在双曲线上，所以有



$$\frac{11^2}{7^2}-\frac{y_1^2}{b^2}=1, \quad ①$$

$$\frac{9^2}{7^2}-\frac{y_2^2}{b^2}=1, \quad ②$$

由题意知

$$y_2-y_1=20。 \quad ③$$ (4分)

由①、②、③得

$$y_1=-12,$$
$$y_2=8,$$
$$b=7\sqrt{2}。$$

故双曲线方程为

$$\frac{x^2}{49}-\frac{y^2}{98}=1。$$ (6分)

(Ⅱ) 由双曲线方程得

$$x^2=\frac{1}{2}y^2+49。$$

设冷却塔的容积为$V(m^3)$，则

$$V=\pi\int_{y_1}^{y_2}x^2\,dy$$

$$=\pi\int_{-12}^{8}\left(\frac{1}{2}y^2+49\right)dy$$ (9分)

$$=\pi\left(\frac{1}{6}y^3+49y\right)\bigg|_{-12}^{8},$$

经计算得 $V\approx4.25\times10^3(m^3)$。

答：冷却塔的容积为$4.25\times10^3(m^3)$。 (12分)

(22) 本小题主要考查坐标法、曲线的交点和三角函数性质等基础知识，以及逻辑推理能力和运算能力。满分14分。

解：(Ⅰ)两曲线的交点坐标(x,y)满足方程组

$$\begin{cases}x^2\sin\theta+y^2\cos\theta=1,\\x^2\cos\theta-y^2\sin\theta=1,\end{cases}$$

即

$$\begin{cases}x^2=\sin\theta+\cos\theta,\\y^2=\cos\theta-\sin\theta。\end{cases}$$ (4分)

有4个不同交点等价于 $x^2>0$且$y^2>0$，即

$$\begin{cases}\sin\theta+\cos\theta>0,\\\cos\theta-\sin\theta>0。\end{cases}$$

又因为$0<\theta<\frac{\pi}{2}$，所以得θ的取值范围为$\left(0,\frac{\pi}{4}\right)$。 (8分)

(Ⅱ)由(Ⅰ)的推理知4个交点的坐标(x,y)满足方程 $x^2+y^2=2\cos\theta\left(0<\theta<\frac{\pi}{4}\right)$，即得4个交点共

圆，该圆的圆心在原点，半径为 $r=\sqrt{2\cos\theta}\left(0<\theta<\dfrac{\pi}{4}\right)$。 (11 分)

因为 $\cos\theta$ 在 $\left(0,\dfrac{\pi}{4}\right)$ 上是减函数，所以由 $\cos 0=1,\cos\dfrac{\pi}{4}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ 知 r 的取值范围是 $(\sqrt[4]{2},\sqrt{2})$。

(14 分)