2001 普通高等学校招生考试 (全国卷理)

一、选择题

1. 若 $\sin\theta\cos\theta>0$, 则 θ 在 ( )

(A) 第一、二象限　(B) 第一、三象限

(C) 第一、四象限　(D) 第二、四象限

2. 过点 $A(1,-1)$, $B(-1,1)$ 且圆心在直线 $x+y-2=0$ 上的圆的方程是( )

(A) $(x-3)^2+(y+1)^2=4$　(B) $(x+3)^2+(y-1)^2=4$

(C) $(x-1)^2+(y-1)^2=4$　(D) $(x+1)^2+(y+1)^2=4$

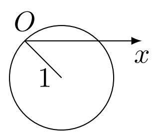
3. 设 $\{a_n\}$ 是递增等差数列, 前三项的和为 12, 前三项的积为 48, 则它的首项是 ( )

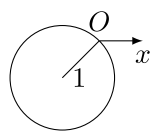
(A) 1　(B) 2　(C) 4　(D) 6

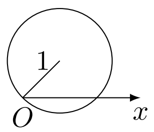
4. 若定义在区间 $(-1,0)$ 内的函数 $f(x)=\log_{2a}(x+1)$ 满足 $f(x)>0$, 则 a 的取值范围是 ( )

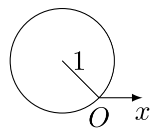
(A) $\left(0,\dfrac{1}{2}\right)$　(B) $\left(0,\dfrac{1}{2}\right]$　(C) $\left(\dfrac{1}{2},+\infty\right)$　(D) $(0,+\infty)$

5. 极坐标方程 $\rho=2\sin\left(\theta+\dfrac{\pi}{4}\right)$ 的图形是 ( )

(A) 

(B) 

(C) 

(D) 

6. 函数 $y=\cos x+1\ (-\pi\leqslant x\leqslant 0)$ 的反函数是 ( )

(A) $y=-\arccos(x-1)\ (0\leqslant x\leqslant 2)$

(B) $y=\pi-\arccos(x-1)\ (0\leqslant x\leqslant 2)$

(C) $y=\arccos(x-1)\ (0\leqslant x\leqslant 2)$

(D) $y=\pi+\arccos(x-1)\ (0\leqslant x\leqslant 2)$

7. 若椭圆经过原点, 且焦点为 $F_1(1,0)$, $F_2(3,0)$, 则其离心率为 ( )

(A) $\dfrac{3}{4}$　(B) $\dfrac{2}{3}$　(C) $\dfrac{1}{2}$　(D) $\dfrac{1}{4}$

8. 若 $0<\alpha<\beta<\dfrac{\pi}{4}$, $\sin\alpha+\cos\alpha=a$, $\sin\beta+\cos\beta=b$, 则 ( )

(A) $a>b$　(B) $a<b$　(C) $ab<1$　(D) $ab>2$

9. 在正三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中, 若 $AB=\sqrt{2}BB_1$, 则 AB_1 与 C_1B 所成的角的大小为 ( )

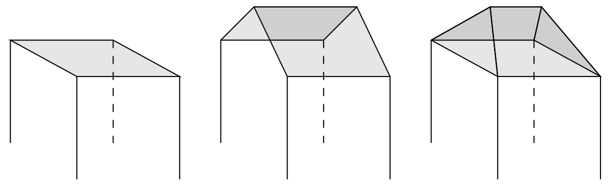
(A) 60°　(B) 90°　(C) 45°　(D) 120°

10. 设 $f(x)$, $g(x)$ 都是单调函数, 有如下四个命题中, 正确的命题是 ( )

① 若 $f(x)$ 单调递增, $g(x)$ 单调递增, 则 $f(x)-g(x)$ 单调递增;
② 若 $f(x)$ 单调递增, $g(x)$ 单调递减, 则 $f(x)-g(x)$ 单调递增;
③ 若 $f(x)$ 单调递减, $g(x)$ 单调递增, 则 $f(x)-g(x)$ 单调递减;
④ 若 $f(x)$ 单调递减, $g(x)$ 单调递减, 则 $f(x)-g(x)$ 单调递减.

(A) ①③　(B) ①④　(C) ②③　(D) ②④

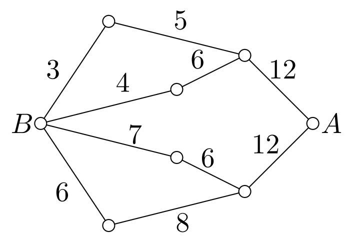
11. 一间民房的屋顶有如图三种不同的盖法: ① 单向倾斜; ② 双向倾斜; ③ 四向倾斜. 记三种盖法屋顶面积分别为 P_1, P_2, P_3. 若屋顶斜面与水平面所成的角都是 α, 则 ( )



①　②　③

(A) $P_3>P_2>P_1$ (B) $P_3>P_2=P_1$ (C) $P_3=P_2>P_1$ (D) $P_3=P_2=P_1$

12. 如图, 小圆圈表示网络的结点, 结点之间的连线表示它们有网线相联. 连线标注的数字表示该段网线单位时间内可以通过的最大信息量. 现从结点 A 向结点 B 传递信息, 信息可以分开沿不同的路线同时传递. 则单位时间内传递的最大信息量为 ( )



(A) 26　(B) 24　(C) 20　(D) 19

二、填空题

13. 若一个圆锥的轴截面是等边三角形, 其面积为 $\sqrt{3}$, 则这个圆锥的侧面积是______.

14. 双曲线 $\dfrac{x^2}{9}-\dfrac{y^2}{16}=1$ 的两个焦点为 F_1, F_2, 点 P 在双曲线上, 若 $PF_1\perp PF_2$, 则点 P 到 x 轴的距离为______.

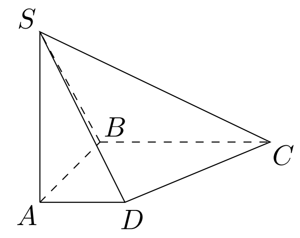
15. 设 $\{a_n\}$ 是公比为 q 的等比数列, S_n 是它的前 n 项和. 若 $\{S_n\}$ 是等差数列, 则 $q=$______.

16. 圆周上有 $2n$ 个等分点 $(n>1)$, 以其中三个点为顶点的直角三角形的个数为______.

三、解答题

17. 如图, 在底面是直角梯形的四棱锥 $S-ABCD$ 中, $\angle ABC=90^\circ$, $SA\perp$ 面 $ABCD$, $SA=AB=BC=1$, $AD=\dfrac{1}{2}$.

(1) 求四棱锥 $S-ABCD$ 的体积;
(2) 求面 SCD 与面 SBA 所成的二面角的正切值.



18. 已知复数 $z_1=\mathrm{i}(1-\mathrm{i})^3$.

(1) 求 $\arg z_1$ 及 $|z_1|$;
(2) 当复数 z 满足 $|z|=1$, 求 $|z-z_1|$ 的最大值.

19. 设抛物线 $y^2=2px\ (p>0)$ 的焦点为 F, 经过点 F 的直线交抛物线于 A, B 两点. 点 C 在抛物线的准线上, 且 $BC\parallel x$ 轴. 证明直线 AC 经过原点 O.

20. 已知 i, m, n 是正整数, 且 $1 < i \leqslant m < n$.

(1) 证明: $n^i \mathrm{A}_m^i < m^i \mathrm{A}_n^i$;

(2) 证明: $(1+m)^n > (1+n)^m$.

21. 从社会效益和经济效益出发, 某地投入资金进行生态环境建设, 并以此发展旅游产业. 根据规划, 本年度投入 800 万元, 以后每年投入将比上年减少 $\dfrac{1}{5}$. 本年度当地旅游业收入估计为 400 万元, 由于该项建设对旅游业的促进作用, 预计今后的旅游业收入每年会比上年增加 $\dfrac{1}{4}$.

(1) 设 n 年内 (本年度为第一年) 总投入为 a_n 万元, 旅游业总收入为 b_n 万元. 写出 a_n, b_n 的表达式;

(2) 至少经过几年旅游业的总收入才能超过总投入?

22. 设 $f(x)$ 是定义在 $\mathbf{R}$ 上的偶函数, 其图象关于直线 $x=1$ 对称, 对任意 x_1, $x_2 \in \left[0, \dfrac{1}{2}\right]$, 都有 $f(x_1+x_2) = f(x_1) \cdot f(x_2)$, 且 $f(1) = a > 0$.

(1) 求 $f\left(\dfrac{1}{2}\right)$, $f\left(\dfrac{1}{4}\right)$;

(2) 证明: $f(x)$ 是周期函数;

(3) 记 $a_n = f\left(2n + \dfrac{1}{2n}\right)$, 求 $\lim\limits_{n\to\infty} (\ln a_n)$.