2002 普通高等学校招生考试 (上海卷理)

一、填空题

1. 若 $z \in \mathbf{C}$, $(3+z)\mathrm{i}=1$ (i 为虚数单位), 则 $z=$______.

2. 已知向量 $\vec{a}$ 和 $\vec{b}$ 的夹角为 $120°$, 且 $|\vec{a}|=2$, $|\vec{b}|=5$, 则 $(2\vec{a}-\vec{b})\cdot\vec{a}=$______.

3. 方程 $\log_3(1-2\times 3^x)=2x+1$ 的解 $x=$______.

4. 若正四棱锥的底面边长为 $2\sqrt{3}$ cm, 体积为 4 cm^3, 则它的侧面与底面所成的二面角的大小是______.

5. 在二项式 $(1+3x)^n$ 和 $(2x+5)^n$ 的展开式中, 各项系数之和分别记为 a_n、b_n, n 是正整数, 则 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_n-2b_n}{3a_n-4b_n}=$______.

6. 已知圆 $(x+1)^2+y^2=1$ 和圆外一点 $P(0,2)$, 过点 P 作圆的切线, 则两条切线夹角的正切值是______.

7. 在某次花样滑冰比赛中, 发生裁判受贿事件, 竞赛委员会决定将裁判由原来的 9 名增至 14 名, 但只任取其中 7 名裁判的评分作为有效分, 若 14 名裁判中有 2 人受贿, 则有效分中没有受贿裁判的评分的概率是______. (结果用数值表示)

8. 曲线 $\begin{cases} x=t^2-1, \\ y=2t+1, \end{cases}$ (t 为参数) 的焦点坐标是______.

9. 若 A、B 两点的极坐标 $A\left(4,\dfrac{\pi}{3}\right)$、$B(6,0)$, 则 AB 中点的极坐标是______.

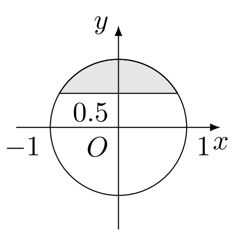
10. 设函数 $f(x)=\sin 2x$, 若 $f(x+t)$ 是偶函数, 则 t 的一个可能值是______.

11. 若数列 $\{a_n\}$ 中, $a_1=3$, 且 $a_{n+1}=a_n^2$ (n 是正整数), 则数列的通项 $a_n=$______.

12. 已知函数 $y=f(x)$ (定义域为 D, 值域为 A) 有反函数 $y=f^{-1}(x)$, 则方程 $f(x)=0$ 有解 $x=a$, 且 $f(x)>x$ $(x\in D)$ 的充要条件是 $y=f^{-1}(x)$ 满足______.

二、选择题

13. 如图, 与复平面中的阴影部分 (含边界) 对应的复数集合是 ( )



(A) $\left\{z \,\middle|\, |z|=1,\ \dfrac{\pi}{6}\leqslant \arg z\leqslant\dfrac{5\pi}{6},\ z\in\mathbf{C}\right\}$

(B) $\left\{z \,\middle|\, |z|\leqslant 1,\ \dfrac{\pi}{6}\leqslant \arg z\leqslant\dfrac{5\pi}{6},\ z\in\mathbf{C}\right\}$

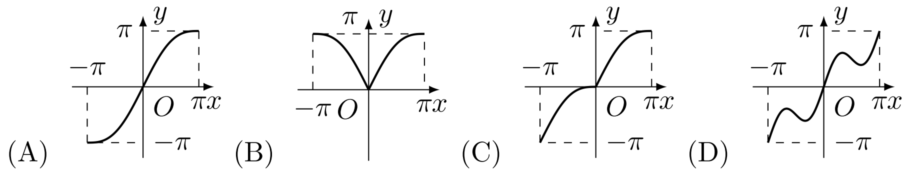
(C) $\left\{z \,\middle|\, |z|=1,\ \mathrm{Im}\, z\geqslant\dfrac{1}{2},\ z\in\mathbf{C}\right\}$

(D) $\left\{z \,\middle|\, |z|\leqslant 1,\ \mathrm{Im}\, z\geqslant\dfrac{1}{2},\ z\in\mathbf{C}\right\}$

14. 已知直线 l、m, 平面 α、β, 且 $l\perp\alpha$, $m\subset\beta$, 给出下列四个命题.
① 若 $\alpha\parallel\beta$, $l\perp m$; ② $l\perp m$, $\alpha\parallel\beta$; ③ 若 $\alpha\perp\beta$, 则 $l\parallel m$; ④ 若 $l\parallel m$, $\alpha\perp\beta$.
其中正确命题的个数是 ( )

(A) 1 个 (B) 2 个 (C) 3 个 (D) 4 个

15. 函数 $y=x+\sin|x|$, $x\in[-\pi,\pi]$ 的大致图象是 ( )



16. 一般地, 家庭用电量 (千瓦时) 与气温 (°C) 有一定的关系. 图 (1) 表示某年 12 个月中每月的平均气温, 图 (2) 表示某家庭在这年 12 个月中每月的用电量, 根据这些信息, 以下关于该家庭用电量与气温间关系的叙述中, 正确是 ( )

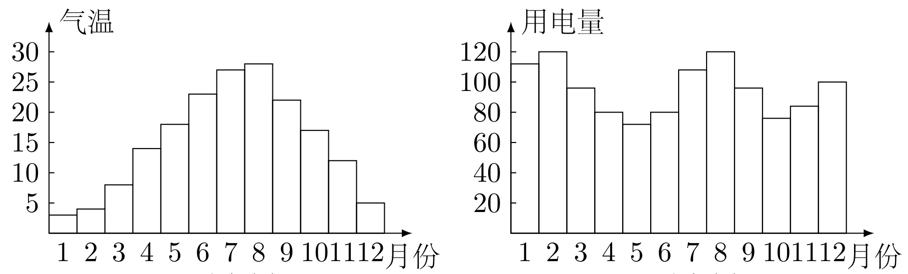


图 (1) 图 (2)

(A) 气温最高时, 用电量最多

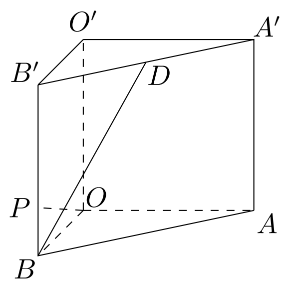
(B) 气温最低时, 用电量最少

(C) 当气温大于某一值时, 用电量随气温增高而增加

(D) 当气温小于某一值时, 用电量随气温降低而增加

三、解答题

17. 如图, 在直三棱柱 $ABO-A'B'O'$ 中, $OO'=4$, $OA=4$, $OB=3$, $\angle AOB=90°$, D 是线段 $A'B'$ 的中点, P 是侧棱 BB' 上的一点, 若 $OP\perp BD$, 求 OP 与底面 AOB 所成角的大小. (结果用反三角函数值表示)



18. 已知点 $A(-\sqrt{3},0)$ 和 $B(\sqrt{3},0)$, 动点 C 到 A、B 两点的距离之差的绝对值为 2, 点 C 的轨迹与直线 $y=x-2$ 交于 D、E 两点, 求线段 DE 的长.

19. 已知函数 $f(x)=x^2+2x\cdot\tan\theta-1$, $x\in[-1,\sqrt{3}]$, 其中 $\theta\in\left(-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right)$.
(1) 当 $\theta=-\dfrac{\pi}{6}$ 时, 求函数 $y=f(x)$ 的最大值与最小值.
(2) 求实数 θ 的取值范围, 使 $y=f(x)$ 在区间 $[-1,\sqrt{3}]$ 上是单调函数.

20. 某商场在促销期间规定: 商场内所有商品按标价的 80% 出售, 同时, 当顾客在该商场内消费满一定金额后, 按如下方案获得相应金额的奖券:

消费金额的范围	$[200,400)$	$[400,500)$	$[500,700)$	$[700,900)$	$\cdots$
获得奖券的金额	30	60	100	130	$\cdots$

根据上述促销方法, 顾客在该商场购物可以获得双重优惠, 例如, 购买标价为 400 元的商品, 则消费金额为 320 元, 获得的优惠额为: $400\times 0.2+30=110$ (元), 设购买商品得到的优惠率 $=\dfrac{\text{购买商品获得的优惠额}}{\text{商品的标价}}$. 试问:

(1) 若购买一件标价为 1000 元的商品, 顾客得到的优惠率是多少?

(2) 对于标价在 $[500,800]$ (元) 内的商品, 顾客购买标价为多少元的商品, 可得到不小于 $\dfrac{1}{3}$ 的优惠率?

21. 已知函数 $f(x)=a\times b^x$ 的图象过点 $A\left(4,\dfrac{1}{4}\right)$ 和 $B(5,1)$.

(1) 求函数 $f(x)$ 的解析式;

(2) 记 $a_n=\log_2 f(n)$, n 是正整数, S_n 是数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和, 解关于 n 的不等式 $a_nS_n\leqslant 0$;

(3) 对于 (2) 中的 a_n 与 S_n, 整数 10^4 是否为数列 $\{a_nS_n\}$ 中的项? 若是, 则求出相应的项数; 若不是, 则说明理由.

22. 规定 $\mathrm{C}_x^m=\dfrac{x(x-1)\cdots(x-m+1)}{m!}$, 其中 $x\in\mathbf{R}$, m 是正整数, 且 $\mathrm{C}_x^0=1$, 这是组合数 C_n^m (n, m 是正整数, 且 $m\leqslant n$) 的一种推广.

(1) 求 C_{-15}^5 的值.

(2) 组合数的两个性质: ① $\mathrm{C}_n^m=\mathrm{C}_n^{n-m}$; ② $\mathrm{C}_n^m+\mathrm{C}_n^{m-1}=\mathrm{C}_{n+1}^m$ 是否都能推广到 C_x^m ($x\in\mathbf{R}$, m 是正整数) 的情形? 若能推广, 则写出推广的形式并给出证明; 若不能, 则说明理由;

(3) 已知组合数 C_n^m 是正整数, 证明: 当 $x\in\mathbf{Z}$, m 是正整数时, $\mathrm{C}_x^m\in\mathbf{Z}$.