

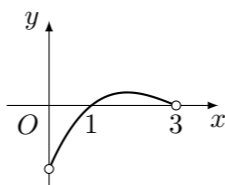
2002 普通高等学校招生考试 (北京卷理)

一、选择题

- 满足条件 $M \cup \{1\} = \{1, 2, 3\}$ 的集合 M 的个数是 ()
 (A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 4
- 在平面直角坐标系中, 已知两点 $A(\cos 80^\circ, \sin 80^\circ)$, $B(\cos 20^\circ, \sin 20^\circ)$, 则 $|AB|$ 的值是 ()
 (A) $\frac{1}{2}$ (B) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ (C) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ (D) 1
- 下列四个函数中, 以 π 为最小正周期, 且在区间 $(\frac{\pi}{2}, \pi)$ 上为减函数的是 ()
 (A) $y = \cos^2 x$ (B) $y = 2|\sin x|$ (C) $y = (\frac{1}{3})^{\cos x}$ (D) $y = -\cot x$
- 64 个直径都为 $\frac{a}{4}$ 的球, 记它们的体积之和为 $V_{甲}$, 表面积之和为 $S_{甲}$; 一个直径为 a 的球, 记其体积为 $V_{乙}$, 表面积为 $S_{乙}$, 则 ()
 (A) $V_{甲} > V_{乙}$, $S_{甲} > S_{乙}$ (B) $V_{甲} < V_{乙}$, $S_{甲} < S_{乙}$
 (C) $V_{甲} = V_{乙}$, $S_{甲} > S_{乙}$ (D) $V_{甲} = V_{乙}$, $S_{甲} = S_{乙}$
- 已知某曲线的参数方程是 $\begin{cases} x = \sec \varphi, \\ y = \tan \varphi, \end{cases}$ (φ 为参数), 若以原点为极点, x 轴的正半轴为极轴, 长度单位不便变, 建立极坐标系, 则该曲线的极坐标方程是 ()
 (A) $\rho = 1$ (B) $\rho \cos 2\theta = 1$ (C) $\rho^2 \sin 2\theta = 1$ (D) $\rho^2 \cos 2\theta = 1$
- 给定四条曲线: ① $x^2 + y^2 = \frac{5}{2}$, ② $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$, ③ $x^2 + \frac{y^2}{4} = 1$, ④ $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$. 其中与直线 $x + y - \sqrt{5} = 0$ 仅有一个交点的曲线是 ()
 (A) ①②③ (B) ②③④ (C) ①②④ (D) ①③④
- 已知 $z_1, z_2 \in \mathbf{C}$, 且 $|z_1| = 1$. 若 $z_1 + z_2 = 2$, 则 $|z_1 - z_2|$ 的最大值是 ()
 (A) 6 (B) 5 (C) 4 (D) 3
- 若 $\frac{\cot \theta - 1}{2 \cot \theta + 1} = 1$, 则 $\frac{\cos 2\theta}{1 + \sin 2\theta}$ 的值为 ()
 (A) 3 (B) -3 (C) -2 (D) $-\frac{1}{2}$
- 12 名学生分别到三个不同的路口进行车流量的调查, 若每个路口 4 人, 则不同的分配方案共有 ()
 (A) $C_{12}^4 C_8^4 C_4^4$ 种 (B) $3C_{12}^4 C_8^4 C_4^4$ 种 (C) $C_{12}^4 C_8^4 A_3^3$ 种 (D) $\frac{C_{12}^4 C_8^4 C_4^4}{A_3^3}$ 种
- 设命题: “直四棱柱 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 中, 平面 ACB_1 与对角面 BB_1D_1D 垂直”; 命题乙: “直四棱柱 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 是正方体”, 那么, 甲是乙的 ()

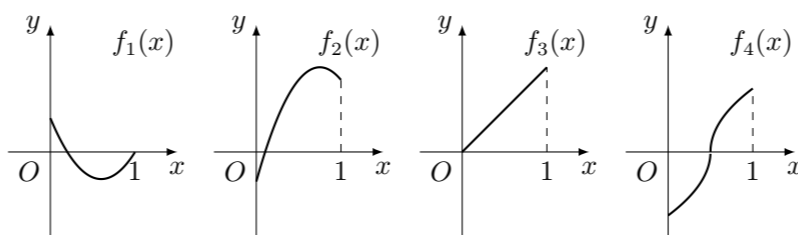
- (A) 充分必要条件 (B) 充分非必要条件
 (C) 必要非充分条件 (D) 即非充分又非必要条件

11. 已知 $f(x)$ 是定义在 $(-3, 3)$ 上的奇函数, 当 $0 < x < 3$ 时, $f(x)$ 的图象如图所示, 那么不等式 $f(x) \cos x < 0$ 的解集是 ()



- (A) $(-3, -\frac{\pi}{2}) \cup (0, 1) \cup (\frac{\pi}{2}, 3)$ (B) $(-\frac{\pi}{2}, -1) \cup (0, 1) \cup (\frac{\pi}{2}, 3)$
 (C) $(-3, -1) \cup (0, 1) \cup (1, 3)$ (D) $(-3, -\frac{\pi}{2}) \cup (0, 1) \cup (1, 3)$

12. 如图所示, $f_i(x)$ ($i = 1, 2, 3, 4$) 是定义在 $[0, 1]$ 上的四个函数, 其中满足性质: “对 $[0, 1]$ 中任意的 x_1 和 x_2 , 任意 $\lambda \in [0, 1]$, $f[\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2] \leq \lambda f(x_1) + (1 - \lambda)f(x_2)$ 恒成立”的只有 ()



- (A) $f_1(x), f_3(x)$ (B) $f_2(x)$ (C) $f_2(x), f_3(x)$ (D) $f_4(x)$

二、填空题

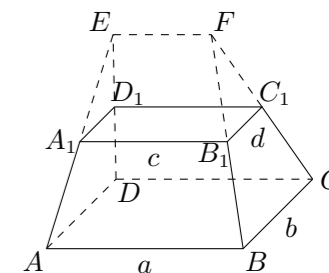
13. $\arcsin(-\frac{2}{5}), \arccos(-\frac{3}{4}), \arctan(-\frac{5}{4})$ 从小到大的顺序是_____.
14. 等差数列 $\{a_n\}$ 中, $a_1 = 2$, 公差为零, 且 a_1, a_3, a_{11} 恰好是某等比数列的前三项, 那么该等比数列公比的值等于_____.
15. 关于直角 AOB 在平面 α 内的射影有如下判断: ① 可能是 0° 的角; ② 可能是锐角; ③ 可能是直角; ④ 可能是直角; ⑤ 可能是 180° 的角. 其中正确的序号是_____. (注: 把你认为正确判断的序号都填上)
16. 已知 P 是直线 $3x + 4y + 8 = 0$ 上的动点, PA, PB 是圆 $x^2 + y^2 - 2x - 2y + 8 = 0$ 的两条切线, A, B 是切点, C 是圆心, 那么四边形 $PACB$ 面积的最小值为_____.

三、解答题

17. 解不等式 $|\sqrt{2x-1} - x| < 2$.

18. 如图, 在多面体 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 中, 上、下底面平行且均为矩形, 相对的侧面与同一底面所成的二面角大小相等, 侧棱延长后相交与 E, F 两点, 上、下底面矩形的长、宽分别为 c, d 与 a, b , 且 $a > c, b > d$, 两底面间的距离为 h .

- (1) 求侧面 ABB_1A_1 与底面 $ABCD$ 所成二面角的大小;
 (2) 证明: $EF \parallel ABCD$;
 (3) 在估测该多面体的体积时, 经常运用近似公式 $V_{估} = S_{中截面} \cdot h$ 来计算, 已知它的体积公式是 $V = \frac{h}{6}(S_{上底面} + 4S_{中截面} + S_{下底面})$, 试判断 $V_{估}$ 与 V 的大小关系, 并加以证明.
 注: 与两个底面平行, 且到两个底面距离相等的截面称为该多面体的中截面.



19. 数列 $\{a_n\}$ 由下列条件确定: $x_1 = a > 0, x_{n+1} = \frac{1}{2}(x_n + \frac{a}{x_n}), n \in \mathbf{N}$.
- (1) 证明: 对 $n \geq 2$, 总有 $x_n \geq \sqrt{a}$;
 (2) 证明: 对 $n \geq 2$, 总有 $x_n \geq x_{n+1}$;
 (3) 若数列 $\{a_n\}$ 的极限存在, 且大于零, 求 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ 的值.

20. 在研究并行计算的基本算法时, 有以下简单模型问题: 用计算机求 n 个不同的数 v_1, v_2, \dots, v_n 的和 $\sum_{i=1}^n v_i = v_1 + v_2 + \dots + v_n$, 计算开始前, n 个数存贮在 n 台由网络连接的计算机中, 每台机器存一个数. 计算开始后, 在一个单位时间内, 每台机器至多到一台其他机器中读数据, 并与自己原有数据相加得到新的数据, 各台机器可同时完成上述工作. 为了用尽可能少的单位时间, 即可完成计算, 方法可用下表表示:

机器号	初始时	第一单位时间		第二单位时间		第三单位时间	
		被读机号	结果	被读机号	结果	被读机号	结果
1	v_1	2	$v_1 + v_2$				
2	v_2	1	$v_2 + v_1$				

- (1) 当 $n = 4$ 时, 至少需要多少个单位时间可完成计算? 把你设计的方法填入下表:

机器号 初始时 第一单位时间 第二单位时间 第三单位时间 被读机号 结果 被读机号 结果 被读机号 结果

机器号	初始时	第一单位时间		第二单位时间		第三单位时间	
		被读机号	结果	被读机号	结果	被读机号	结果
1	v_1						
2	v_2						
3	v_3						
4	v_4						

- (2) 当 $n = 128$ 时, 要使所有机器都得到 $\sum_{i=1}^n v_i$, 至少需要多少个单位时间可完成计算? (结论不要求证明)

21. 已知 $O(0, 0), B(1, 0), C(b, c)$ 是 $\triangle OBC$ 的三个顶点.

- (1) 写出 $\triangle OBC$ 的重心 G , 外心 F , 垂心 H 的坐标, 并证明 G, F, H 三点共线;
 (2) 当直线 FH 与 OB 平行时, 求顶点 C 的轨迹.

22. 已知 $f(x)$ 是定义在 \mathbf{R} 上的不恒为零的函数, 且对于任意的 $a, b \in \mathbf{R}$ 都满足: $f(a \cdot b) = af(b) + bf(a)$.

- (1) 求 $f(0), f(1)$ 的值;
 (2) 判断 $f(x)$ 的奇偶性, 并证明你的结论;
 (3) 若 $f(2) = 2, u_n = \frac{f(2^{-n})}{n} (n \in \mathbf{N})$, 求数列 $\{u_n\}$ 的前 n 项的和 S_n .