

2003 普通高等学校招生考试 (上海卷文)

一、填空题

1. 函数 $y = \sin x \cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right) + \cos x \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$ 的最小正周期 $T =$ _____.
2. 若 $x = \frac{\pi}{3}$ 是方程 $2 \cos(x + \alpha) = 1$ 的解, 其中 $\alpha \in (0, 2\pi)$, 则 $\alpha =$ _____.
3. 在等差数列 $\{a_n\}$ 中, $a_5 = 3, a_6 = -2$, 则 $a_4 + a_5 + \dots + a_{10} =$ _____.
4. 已知定点 $A(0, 1)$, 点 B 在直线 $x + y = 0$ 上运动, 当线段 AB 最短时, 点 B 的坐标是_____.
5. 在正四棱锥 $P - ABCD$ 中, 若侧面与底面所成二面角的大小为 60° , 则异面直线 PA 与 BC 所成角的大小等于_____. (结果用反三角函数值表示)
6. 设集合 $A = \{x \mid |x| < 4\}$, $B = \{x \mid x^2 - 4x + 3 > 0\}$, 则集合 $\{x \mid x \in A \text{ 且 } x \notin A \cap B\} =$ _____.
7. 在 $\triangle ABC$ 中, $\sin A : \sin B : \sin C = 2 : 3 : 4$, 则 $\angle ABC =$ _____. (结果用反三角函数值表示)
8. 若首项为 a_1 , 公比为 q 的等比数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和总小于这个数列的各项和, 则首项 a_1 , 公比 q 的一组取值可以是 $(a_1, q) =$ _____.
9. 某国际科研合作项目成员由 11 个美国人、4 个法国人和 5 个中国人组成. 现从中随机选出两位作为成果发布人, 则此两人不属于同一个国家的概率为_____. (结果用分数表示)
10. 方程 $x^3 + \lg x = 18$ 的根 $x \approx$ _____. (结果精确到 0.1)
11. 已知点 $A\left(0, \frac{2}{n}\right), B\left(0, -\frac{2}{n}\right), C\left(4 + \frac{2}{n}, 0\right)$, 其中 n 为正整数. 设 S_n 表示 $\triangle ABC$ 外接圆的面积, 则 $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n =$ _____.
12. 给出问题: F_1, F_2 是双曲线 $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{20} = 1$ 的焦点, 点 P 在双曲线上. 若点 P 到焦点 F_1 的距离等于 9, 求点 P 到焦点 F_2 的距离. 某学生的解答如下: 双曲线的实轴长为 8, 由 $||PF_1| - |PF_2|| = 8$, 即 $|9 - |PF_2|| = 8$, 得 $|PF_2| = 1$ 或 17. 该学生的解答是否正确? 若正确, 请将他的解题依据填在下面空格内, 若不正确, 将正确的结果填在下面空格内_____.

二、选择题

13. 下列函数中, 既为偶函数又在 $(0, \pi)$ 上单调递增的是 ()

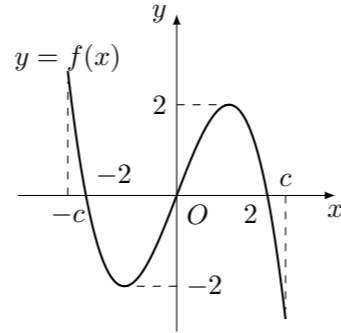
(A) $y = \tan |x|$ (B) $y = \cos(-x)$
 (C) $y = \sin\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$ (D) $y = \left|\cot \frac{x}{2}\right|$
14. 在下列条件中, 可判断平面 α 与 β 平行的是 ()

(A) α, β 都垂直于平面 γ
 (B) α 内存在不共线的三点到 β 的距离相等
 (C) l, m 是 α 内两条直线, 且 $l \parallel \beta, m \parallel \beta$
 (D) l, m 是两条异面直线, 且 $l \parallel \alpha, m \parallel \alpha, l \parallel \beta, m \parallel \beta$

15. 在 $P(1, 1), Q(1, 2), M(2, 3)$ 和 $N\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}\right)$ 四点中, 函数 $y = a^x$ 的图象与其反函数的图象的公共点只可能是点 ()

(A) P (B) Q (C) M (D) N

16. $f(x)$ 是定义在区间 $[-c, c]$ 上的奇函数, 其图象如图所示: 令 $g(x) = af(x) + b$, 则下列关于函数 $g(x)$ 的叙述正确的是 ()

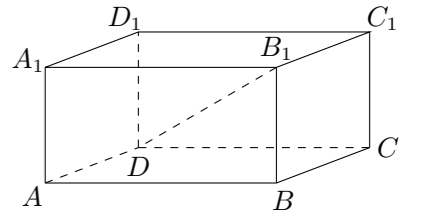


- (A) 若 $a < 0$, 则函数 $g(x)$ 的图象关于原点对称
- (B) 若 $a = -1, -2 < b < 0$, 则方程 $g(x) = 0$ 有大于 2 的实根
- (C) 若 $a \neq 0, b = 2$, 则方程 $g(x) = 0$ 有两个实根
- (D) 若 $a \geq 1, b < 2$, 则方程 $g(x) = 0$ 有三个实根

三、解答题

17. 已知复数 $z_1 = \cos \theta - i, z_2 = \sin \theta + i$, 求 $|z_1 \cdot z_2|$ 的最大值和最小值.

18. 已知平行六面体 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 中, $A_1A \perp$ 平面 $ABCD, AB = 4, AD = 2$. 若 $B_1D \perp BC$, 直线 B_1D 与平面 $ABCD$ 所成的角等于 30° , 求平行六面体 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 的体积.



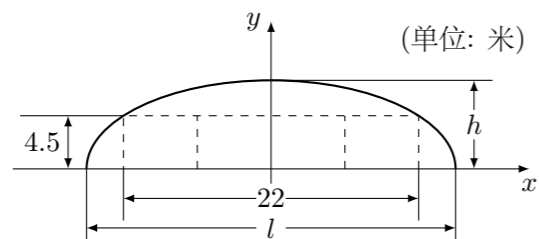
19. 已知函数 $f(x) = \frac{1}{x} - \log_2 \frac{1+x}{1-x}$, 求函数 $f(x)$ 的定义域, 并讨论它的奇偶性和单调性.

20. 如图, 某隧道设计为双向四车道, 车道总宽 22 米, 要求通行车辆限高 4.5 米, 隧道全长 2.5 千米, 隧道的拱线近似地看成半个椭圆形状.

(1) 若最大拱高 h 为 6 米, 则隧道设计的拱宽 l 是多少?

(2) 若最大拱高 h 不小于 6 米, 则应如何设计拱高 h 和拱宽 l , 才能使半个椭圆形隧道的土方工程量最最小?

注: 半个椭圆的面积公式为 $S = \frac{\pi}{4}lh$, 柱体体积为: 底面积乘以高. 本题结果精确到 0.1 米



21. 在以 O 为原点的直角坐标系中, 点 $A(4, -3)$ 为 $\triangle OAB$ 的直角顶点. 已知 $|AB| = 2|OA|$, 且点 B 的纵坐标大于零.

(1) 求向量 \overrightarrow{AB} 的坐标;

(2) 求圆 $x^2 - 6x + y^2 + 2y = 0$ 关于直线 OB 对称的圆的方程;

(3) 是否存在实数 a , 使抛物线 $y = ax^2 - 1$ 上总有关于直线 OB 对称的两个点? 若不存在, 说明理由; 若存在, 求 a 的取值范围.

22. 已知数列 $\{a_n\}$ (n 为正整数) 是首项是 a_1 , 公比为 q 的等比数列.

(1) 求和: $a_1C_2^0 - a_2C_2^1 + a_3C_2^2, a_1C_3^0 - a_2C_3^1 + a_3C_3^2 - a_4C_3^3$;

(2) 由 (1) 的结果归纳概括出关于正整数 n 的一个结论, 并加以证明;

(3) 设 $q \neq 1, S_n$ 是等比数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和, 求: $S_1C_n^0 - S_2C_n^1 + S_3C_n^2 - S_4C_n^3 + \cdots + (-1)^n S_{n+1}C_n^n$.