

2003 普通高等学校招生考试 (上海卷理)

一、填空题

- 函数 $y = \sin x \cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right) + \cos x \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$ 的最小正周期 $T =$ _____.
- 若 $x = \frac{\pi}{3}$ 是方程 $2 \cos(x + \alpha) = 1$ 的解, 其中 $\alpha \in (0, 2\pi)$, 则 $\alpha =$ _____.
- 在等差数列 $\{a_n\}$ 中, $a_5 = 3, a_6 = -2$, 则 $a_4 + a_5 + \dots + a_{10} =$ _____.
- 在极坐标系中, 定点 $A\left(1, \frac{\pi}{2}\right)$, 点 B 在直线 $\rho \cos \theta + \rho \sin \theta = 0$ 上运动, 当线段 AB 最短时, 点 B 的极坐标是_____.
- 在正四棱锥 $P-ABCD$ 中, 若侧面与底面所成二面角的大小为 60° , 则异面直线 PA 与 BC 所成角的大小等于_____. (结果用反三角函数值表示)
- 设集合 $A = \{x \mid |x| < 4\}$, $B = \{x \mid x^2 - 4x + 3 > 0\}$, 则集合 $\{x \mid x \in A \text{ 且 } x \notin A \cap B\} =$ _____.
- 在 $\triangle ABC$ 中, $\sin A : \sin B : \sin C = 2 : 3 : 4$, 则 $\angle ABC =$ _____. (结果用反三角函数值表示)
- 若首项为 a_1 , 公比为 q 的等比数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和总小于这个数列的各项和, 则首项 a_1 , 公比 q 的一组取值可以是 $(a_1, q) =$ _____.
- 某国际科研合作项目成员由 11 个美国人、4 个法国人和 5 个中国人组成. 现从中随机选出两位作为成果发布人, 则此两人不属于同一个国家的概率为_____. (结果用分数表示)
- 方程 $x^3 + \lg x = 18$ 的根 $x \approx$ _____. (结果精确到 0.1)
- 已知点 $A\left(0, \frac{2}{n}\right), B\left(0, -\frac{2}{n}\right), C\left(4 + \frac{2}{n}, 0\right)$, 其中 n 为正整数. 设 S_n 表示 $\triangle ABC$ 外接圆的面积, 则 $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n =$ _____.
- 给出问题: F_1, F_2 是双曲线 $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{20} = 1$ 的焦点, 点 P 在双曲线上. 若点 P 到焦点 F_1 的距离等于 9, 求点 P 到焦点 F_2 的距离. 某学生的解答如下: 双曲线的实轴长为 8, 由 $||PF_1| - |PF_2|| = 8$, 即 $|9 - |PF_2|| = 8$, 得 $|PF_2| = 1$ 或 17. 该学生的解答是否正确? 若正确, 请将他的解题依据填在下面空格内, 若不正确, 将正确的结果填在下面空格内_____.

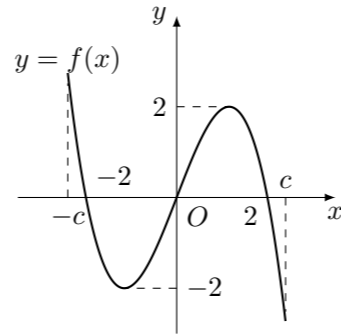
二、选择题

- 下列函数中, 既为偶函数又在 $(0, \pi)$ 上单调递增的是 ()
 (A) $y = \tan |x|$ (B) $y = \cos(-x)$
 (C) $y = \sin\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$ (D) $y = \left|\cot \frac{x}{2}\right|$
- 在下列条件中, 可判断平面 α 与 β 平行的是 ()
 (A) α, β 都垂直于平面 γ
 (B) α 内存在不共线的三点到 β 的距离相等
 (C) l, m 是 α 内两条直线, 且 $l \parallel \beta, m \parallel \beta$
 (D) l, m 是两条异面直线, 且 $l \parallel \alpha, m \parallel \alpha, l \parallel \beta, m \parallel \beta$

- $a_1, b_1, c_1, a_2, b_2, c_2$ 均为非零实数, 不等式 $a_1x^2 + b_1x + c_1 > 0$ 和 $a_2x^2 + b_2x + c_2 > 0$ 的解集分别为集合 M 和 N , 那么“ $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2}$ ”是“ $M = N$ ”的 ()

- (A) 充分非必要条件 (B) 必要非充分条件
 (C) 充要条件 (D) 既非充分又非必要条件

- $f(x)$ 是定义在区间 $[-c, c]$ 上的奇函数, 其图象如图所示: 令 $g(x) = af(x) + b$, 则下列关于函数 $g(x)$ 的叙述正确的是 ()

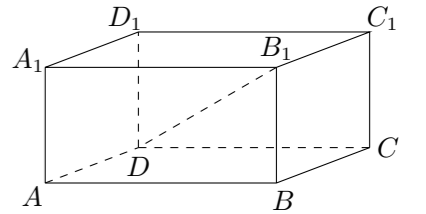


- (A) 若 $a < 0$, 则函数 $g(x)$ 的图象关于原点对称
 (B) 若 $a = -1, -2 < b < 0$, 则方程 $g(x) = 0$ 有大于 2 的实根
 (C) 若 $a \neq 0, b = 2$, 则方程 $g(x) = 0$ 有两个实根
 (D) 若 $a \geq 1, b < 2$, 则方程 $g(x) = 0$ 有三个实根

三、解答题

- 已知复数 $z_1 = \cos \theta - i, z_2 = \sin \theta + i$, 求 $|z_1 \cdot z_2|$ 的最大值和最小值.

- 已知平行六面体 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 中, $A_1A \perp$ 平面 $ABCD, AB = 4, AD = 2$. 若 $B_1D \perp BC$, 直线 B_1D 与平面 $ABCD$ 所成的角等于 30° , 求平行六面体 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 的体积.



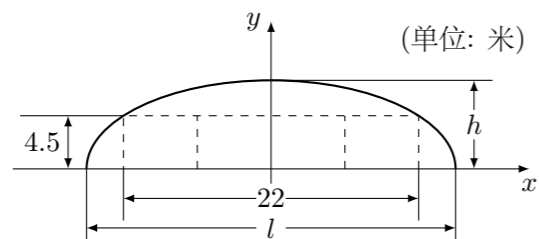
- 已知数列 $\{a_n\}$ (n 为正整数) 是首项是 a_1 , 公比为 q 的等比数列.
 (1) 求和: $a_1C_2^0 - a_2C_2^1 + a_3C_2^2, a_1C_3^0 - a_2C_3^1 + a_3C_3^2 - a_4C_3^3$;
 (2) 由 (1) 的结果归纳概括出关于正整数 n 的一个结论, 并加以证明.

20. 如图, 某隧道设计为双向四车道, 车道总宽 22 米, 要求通行车辆限高 4.5 米, 隧道全长 2.5 千米, 隧道的拱线近似地看成半个椭圆形状.

(1) 若最大拱高 h 为 6 米, 则隧道设计的拱宽 l 是多少?

(2) 若最大拱高 h 不小于 6 米, 则应如何设计拱高 h 和拱宽 l , 才能使半个椭圆形隧道的土方工程量最最小?

注: 半个椭圆的面积公式为 $S = \frac{\pi}{4}lh$, 柱体体积为: 底面积乘以高. 本题结果精确到 0.1 米



21. 在以 O 为原点的直角坐标系中, 点 $A(4, -3)$ 为 $\triangle OAB$ 的直角顶点. 已知 $|AB| = 2|OA|$, 且点 B 的纵坐标大于零.

(1) 求向量 \overrightarrow{AB} 的坐标;

(2) 求圆 $x^2 - 6x + y^2 + 2y = 0$ 关于直线 OB 对称的圆的方程;

(3) 是否存在实数 a , 使抛物线 $y = ax^2 - 1$ 上总有关于直线 OB 对称的两个点? 若不存在, 说明理由; 若存在, 求 a 的取值范围.

22. 已知集合 M 是满足下列性质的函数 $f(x)$ 的全体: 存在非零常数 T , 对任意 $x \in \mathbf{R}$, 有 $f(x+T) = Tf(x)$ 成立.

(1) 函数 $f(x) = x$ 是否属于集合 M ? 说明理由;

(2) 设函数 $f(x) = a^x$ ($a > 0$, 且 $a \neq 1$) 的图象与 $y = x$ 的图象有公共点, 证明: $f(x) = a^x \in M$;

(3) 若函数 $f(x) = \sin kx \in M$, 求实数 k 的取值范围.