

2003 普通高等学校招生考试 (天津卷文)

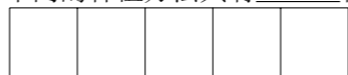
一、选择题

1. 不等式 $\sqrt{4x-x^2} < x$ 的解集是 ()
 (A) (0, 2) (B) (2, +∞)
 (C) (2, 4) (D) $(-\infty, 0) \cup (2, +\infty)$
2. 已知 $x \in (-\frac{\pi}{2}, 0)$, $\cos x = \frac{4}{5}$, 则 $\tan 2x =$ ()
 (A) $\frac{7}{24}$ (B) $-\frac{7}{24}$ (C) $\frac{24}{7}$ (D) $-\frac{24}{7}$
3. $\frac{1-\sqrt{3}i}{(\sqrt{3}+i)^2} =$ ()
 (A) $\frac{1}{4} + \frac{\sqrt{3}}{4}i$ (B) $-\frac{1}{4} - \frac{\sqrt{3}}{4}i$ (C) $\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$ (D) $-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$
4. 已知 $x \in (-\frac{\pi}{2}, 0)$, $\cos x = \frac{4}{5}$, 则 $\tan 2x =$ ()
 (A) $\frac{7}{24}$ (B) $-\frac{7}{24}$ (C) $\frac{24}{7}$ (D) $-\frac{24}{7}$
5. 等差数列 $\{a_n\}$ 中, 已知 $a_1 = \frac{1}{3}$, $a_2 + a_5 = 4$, $a_n = 33$, 则 n 为 ()
 (A) 48 (B) 49 (C) 50 (D) 51
6. 双曲线虚轴的一个端点为 M , 两个焦点为 F_1, F_2 , $\angle F_1MF_2 = 120^\circ$, 则双曲线的离心率为 ()
 (A) $\sqrt{3}$ (B) $\frac{\sqrt{6}}{2}$ (C) $\frac{\sqrt{6}}{3}$ (D) $\frac{\sqrt{3}}{3}$
7. 设函数 $f(x) = \begin{cases} 2^{-x} - 1, & x \leq 0, \\ x^{\frac{1}{2}}, & x > 0, \end{cases}$ 若 $f(x_0) > 1$, 则 x_0 的取值范围是 ()
 (A) (-1, 1) (B) (-1, +∞)
 (C) $(-\infty, -2) \cup (0, +\infty)$ (D) $(-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$
8. O 是平面上一定点, A, B, C 是平面上不共线的三个点, 动点 P 满足 $\vec{OP} = \vec{OA} + \lambda \left(\frac{\vec{AB}}{|\vec{AB}|} + \frac{\vec{AC}}{|\vec{AC}|} \right)$, $\lambda \in [0, +\infty)$, 则 P 的轨迹一定通过 $\triangle ABC$ 的 ()
 (A) 外心 (B) 内心 (C) 重心 (D) 垂心
9. 函数 $y = \ln \frac{x+1}{x-1}$, $x \in (1, +\infty)$ 的反函数为 ()
 (A) $y = \frac{e^x - 1}{e^x + 1}$, $x \in (0, +\infty)$ (B) $y = \frac{e^x + 1}{e^x - 1}$, $x \in (0, +\infty)$
 (C) $y = \frac{e^x - 1}{e^x + 1}$, $x \in (-\infty, 0)$ (D) $y = \frac{e^x + 1}{e^x - 1}$, $x \in (-\infty, 0)$

10. 棱长为 a 的正方体中, 连结相邻面的中心, 以这些线段为棱的八面体的体积为 ()
 (A) $\frac{a^3}{3}$ (B) $\frac{a^3}{4}$ (C) $\frac{a^3}{6}$ (D) $\frac{a^3}{12}$
11. 设 $a > 0$, $f(x) = ax^2 + bx + c$, 曲线 $y = f(x)$ 在点 $P(x_0, f(x_0))$ 处切线的倾斜角的取值范围为 $[0, \frac{\pi}{4}]$, 则 P 到曲线 $y = f(x)$ 对称轴距离的取值范围为 ()
 (A) $[0, \frac{1}{a}]$ (B) $[0, \frac{1}{2a}]$ (C) $[0, \frac{b}{2a}]$ (D) $[0, \frac{b-1}{2a}]$
12. 已知长方形的四个顶点 $A(0,0), B(2,0), C(2,1)$ 和 $D(0,1)$, 一质点从 AB 的中点 P_0 沿与 AB 的夹角 θ 的方向射到 BC 上的点 P_1 后, 依次反射到 CD, DA 和 AB 上的点 P_2, P_3 和 P_4 (入射角等于反射角), 设 P_4 的坐标为 $(x_4, 0)$, 若 $1 < x_4 < 2$, 则 $\tan \theta$ 的取值范围是 ()
 (A) $(\frac{1}{3}, 1)$ (B) $(\frac{1}{3}, \frac{2}{3})$ (C) $(\frac{2}{5}, \frac{1}{2})$ (D) $(\frac{2}{5}, \frac{2}{3})$
13. 一个四面体的所有棱长都为 $\sqrt{2}$, 四个顶点在同一球面上, 则此球的表面积为 ()
 (A) 3π (B) 4π (C) $3\sqrt{3}\pi$ (D) 6π

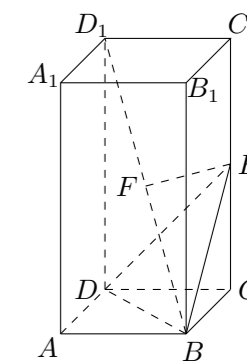
二、填空题

14. $(x^2 - \frac{1}{2x})^9$ 的展开式中 x^9 系数是_____.
15. 某公司生产三种型号的轿车, 产量分别为 1200 辆, 6000 辆和 2000 辆. 为检验该公司的产品质量, 现用分层抽样的方法抽取 46 辆进行检验, 这三种型号的轿车依次应抽取_____, _____, _____辆.
16. 在平面几何里, 有勾股定理: “设 $\triangle ABC$ 的两边 AB, AC 互相垂直, 则 $AB^2 + AC^2 = BC^2$.” 拓展到空间, 类比平面几何的勾股定理, 研究三棱锥的侧面面积与底面面积间的关系, 可以得出的正确结论是: “设三棱锥 $A-BCD$ 的三个侧面 ABC, ACD, ADB 两两互相垂直, 则_____.”
17. 将 3 种作物种植在如图 5 块试验田里, 每块种植一种作物且相邻的试验田不能种植同一作物, 不同的种植方法共有_____种. (以数字作答)



三、解答题

18. 已知正四棱柱 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$, $AB = 1, AA_1 = 2$, E 为 CC_1 中点, F 为 BD_1 中点.
 (1) 证明: EF 为 BD_1 与 CC_1 的公垂线;
 (2) 求点 D_1 到面 BDE 的距离.



19. 已知抛物线 $C_1: y = x^2 + 2x$ 和 $C_2: y = -x^2 + a$, 如果直线 l 同时是 C_1 和 C_2 的切线, 称 l 是 C_1 和 C_2 的公切线, 公切线上两个切点之间的线段, 称为公切线段.
 (1) a 取什么值时, C_1 和 C_2 有且仅有一条公切线? 写出此公切线的方程;
 (2) 若 C_1 和 C_2 有两条公切线, 证明相应的两条公切线段互相平分.

20. 已知数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1 = 1, a_n = 3^{n-1} + a_{n-1} (n \geq 2)$.
 (1) 求 a_2, a_3 ;
 (2) 证明: $a_n = \frac{3^n - 1}{2}$.

21. 有三种产品, 合格率分别为 0.90, 0.95 和 0.95, 各抽取一件进行检验.

(1) 求恰有一件不合格的概率;

(2) 求至少有两件不合格的概率. (精确到 0.001)

22. 已知函数 $f(x) = \sin(\omega x + \varphi)$ ($\omega > 0$, $0 \leq \varphi \leq \pi$) 是 \mathbf{R} 上的偶函数, 其图象关于点 $M\left(\frac{3\pi}{4}, 0\right)$ 对称, 且在区间 $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ 上是单调函数. 求 ω 和 φ 的值.

23. 已知常数 $a > 0$, 向量 $\vec{c} = (0, a)$, $\vec{i} = (1, 0)$. 经过原点 O 以 $\vec{c} + \lambda\vec{i}$ 为方向向量的直线与经过定点 $A(0, a)$ 以 $\vec{i} - 2\lambda\vec{c}$ 为方向向量的直线相交于 P , 其中 $\lambda \in \mathbf{R}$. 试问: 是否存在两个定点 E, F , 使得 $|PE| + |PF|$ 为定值. 若存在, 求出 E, F 的坐标; 若不存在, 说明理由.