

## 2003 普通高等学校招生考试 (全国卷文)

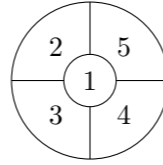
### 一、选择题

1. 直线  $y = 2x$  关于  $x$  轴对称的直线方程为 ( )  
 (A)  $y = -\frac{1}{2}x$  (B)  $y = \frac{1}{2}x$  (C)  $y = -2x$  (D)  $y = 2x$
2. 已知  $x \in (-\frac{\pi}{2}, 0)$ ,  $\cos x = \frac{4}{5}$ , 则  $\tan 2x =$  ( )  
 (A)  $\frac{7}{24}$  (B)  $-\frac{7}{24}$  (C)  $\frac{24}{7}$  (D)  $-\frac{24}{7}$
3. 抛物线  $y = ax^2$  的准线方程是  $y = 2$ , 则  $a$  的值为 ( )  
 (A)  $\frac{1}{8}$  (B)  $-\frac{1}{8}$  (C) 8 (D) -8
4. 等差数列  $\{a_n\}$  中, 已知  $a_1 = \frac{1}{3}$ ,  $a_2 + a_5 = 4$ ,  $a_n = 33$ , 则  $n$  为 ( )  
 (A) 48 (B) 49 (C) 50 (D) 51
5. 双曲线虚轴的一个端点为  $M$ , 两个焦点为  $F_1, F_2$ ,  $\angle F_1MF_2 = 120^\circ$ , 则双曲线的离心率为 ( )  
 (A)  $\sqrt{3}$  (B)  $\frac{\sqrt{6}}{2}$  (C)  $\frac{\sqrt{6}}{3}$  (D)  $\frac{\sqrt{3}}{3}$
6. 设函数  $f(x) = \begin{cases} 2^{-x} - 1 & x \leq 0, \\ x^{\frac{1}{2}}, & x > 0, \end{cases}$  若  $f(x_0) > 1$ , 则  $x_0$  的取值范围是 ( )  
 (A)  $(-1, 1)$  (B)  $(-1, +\infty)$   
 (C)  $(-\infty, -2) \cup (0, +\infty)$  (D)  $(-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$
7. 已知  $f(x^5) = \lg x$ , 则  $f(2) =$  ( )  
 (A)  $\lg 2$  (B)  $\lg 32$  (C)  $\lg \frac{1}{32}$  (D)  $\frac{1}{5} \lg 2$
8. 函数  $y = \sin(x + \varphi)$  ( $0 \leq \varphi \leq \pi$ ) 是  $\mathbf{R}$  上的偶函数, 则  $\varphi =$  ( )  
 (A) 0 (B)  $\frac{\pi}{4}$  (C)  $\frac{\pi}{2}$  (D)  $\pi$
9. 已知点  $(a, 2)$  ( $a > 0$ ) 到直线  $l: x - y + 3 = 0$  的距离为 1, 则  $a =$  ( )  
 (A)  $\sqrt{2}$  (B)  $2 - \sqrt{2}$  (C)  $\sqrt{2} - 1$  (D)  $\sqrt{2} + 1$
10. 已知圆锥的底面半径为  $R$ , 高为  $3R$ , 它的内接圆柱的底面半径为  $\frac{3}{4}R$ , 该圆柱的全面积为 ( )  
 (A)  $2\pi R^2$  (B)  $\frac{9}{4}\pi R^2$  (C)  $\frac{8}{3}\pi R^2$  (D)  $\frac{5}{2}\pi R^2$
11. 已知长方形的四个顶点  $A(0, 0)$ ,  $B(2, 0)$ ,  $C(2, 1)$  和  $D(0, 1)$ , 一质点从  $AB$  的中点  $P_0$  沿与  $AB$  的夹角  $\theta$  的方向射到  $BC$  上的点  $P_1$  后, 依次反射到  $CD$ 、 $DA$  和  $AB$  上的点  $P_2$ 、 $P_3$  和  $P_4$  (入射角等于反射角). 若  $P_1$  与  $P_4$  重合, 则  $\tan \theta =$  ( )  
 (A)  $\frac{1}{3}$  (B)  $\frac{2}{5}$  (C)  $\frac{1}{2}$  (D) 1

12. 一个四面体的所有棱长都为  $\sqrt{2}$ , 四个顶点在同一球面上, 则此球的表面积为 ( )  
 (A)  $3\pi$  (B)  $4\pi$  (C)  $3\sqrt{3}\pi$  (D)  $6\pi$

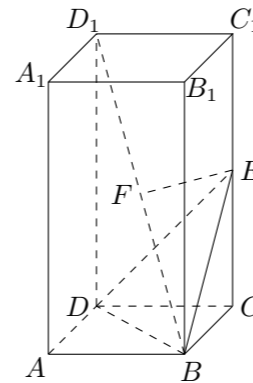
### 二、填空题

13. 不等式  $\sqrt{4x - x^2} < x$  的解集是\_\_\_\_\_.
14.  $(x^2 - \frac{1}{2x})^9$  的展开式中  $x^9$  系数是\_\_\_\_\_.
15. 在平面几何里, 有勾股定理: “设  $\triangle ABC$  的两边  $AB, AC$  互相垂直, 则  $AB^2 + AC^2 = BC^2$ .” 拓展到空间, 类比平面几何的勾股定理, 研究三棱锥的侧面面积与底面面积间的关系, 可以得出的正确结论是: “设三棱锥  $A - BCD$  的三个侧面  $ABC, ACD, ADB$  两两互相垂直, 则\_\_\_\_\_.”
16. 如图, 一个地区分为 5 个行政区域, 现给地图着色, 要求相邻地区不得使用同一颜色, 现有 4 种颜色可供选择, 则不同的着色方法共有种\_\_\_\_\_. (以数字作答)



### 三、解答题

17. 已知正四棱柱  $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ ,  $AB = 1$ ,  $AA_1 = 2$ ,  $E$  为  $CC_1$  中点,  $F$  为  $BD_1$  中点.  
 (1) 证明:  $EF$  为  $BD_1$  与  $CC_1$  的公垂线;  
 (2) 求点  $D_1$  到面  $BDE$  的距离.



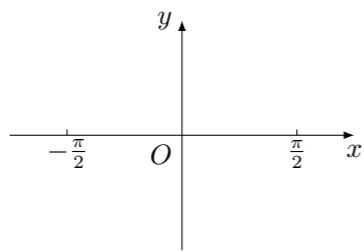
18. 已知复数  $z$  的辐角为  $60^\circ$ , 且  $|z - 1|$  是  $|z|$  和  $|z - 2|$  的等比中项, 求  $|z|$ .

19. 已知数列  $\{a_n\}$  满足  $a_1 = 1$ ,  $a_n = 3^{n-1} + a_{n-1}$  ( $n \geq 2$ ).  
 (1) 求  $a_2, a_3$ ;  
 (2) 证明:  $a_n = \frac{3^n - 1}{2}$ .

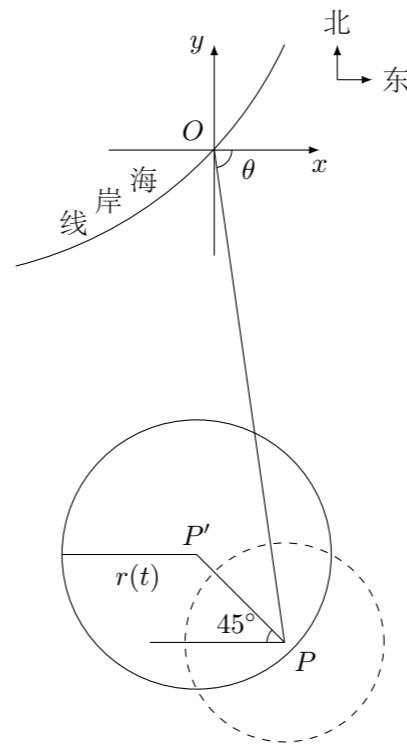
20. 已知函数  $f(x) = 2 \sin x(\sin x + \cos x)$ .

(1) 求函数  $f(x)$  的最小正周期和最大值;

(2) 在给出的直角坐标系中, 画出函数  $y = f(x)$  在区间  $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$  上的图象.



21. 在某海滨城市附近海面有一台风, 据监测, 当前台风中心位于城市  $O$  (如图) 的东偏南  $\theta$  ( $\cos \theta = \frac{\sqrt{2}}{10}$ ) 方向 300 km 的海面  $P$  处, 并以 20 km/h 的速度向西偏北  $45^\circ$  方向移动, 台风侵袭的范围为圆形区域, 当前半径为 60 km, 并以 10 km/h 的速度不断增大, 问几小时后该城市开始受到台风的侵袭?



22. 已知常数  $a > 0$ , 在矩形  $ABCD$  中,  $AB = 4$ ,  $BC = 4a$ ,  $O$  为  $AB$  的中点, 点  $E$ 、 $F$ 、 $G$  分别在  $BC$ 、 $CD$ 、 $DA$  上移动, 且  $\frac{BE}{BC} = \frac{CF}{CD} = \frac{DG}{DA}$ ,  $P$  为  $GE$  与  $OF$  的交点 (如图), 问是否存在两个定点, 使  $P$  到这两点的距离的和为定值? 若存在, 求出这两点的坐标及此定值; 若不存在, 请说明理由.

