

2003 普通高等学校招生考试 (全国卷理)

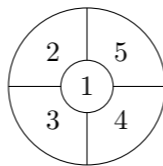
一、选择题

1. 已知 $x \in (-\frac{\pi}{2}, 0)$, $\cos x = \frac{4}{5}$, 则 $\tan 2x =$ ()
 (A) $\frac{7}{24}$ (B) $-\frac{7}{24}$ (C) $\frac{24}{7}$ (D) $-\frac{24}{7}$
2. 圆锥曲线 $\rho = \frac{8 \sin \theta}{\cos^2 \theta}$ 的准线方程是 ()
 (A) $\rho \cos \theta = -2$ (B) $\rho \cos \theta = 2$ (C) $\rho \sin \theta = 2$ (D) $\rho \sin \theta = -2$
3. 设函数 $f(x) = \begin{cases} 2^{-x} - 1, & x \leq 0, \\ x^{\frac{1}{2}}, & x > 0, \end{cases}$ 若 $f(x_0) > 1$, 则 x_0 的取值范围是 ()
 (A) $(-1, 1)$ (B) $(-1, +\infty)$
 (C) $(-\infty, -2) \cup (0, +\infty)$ (D) $(-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$
4. 函数 $y = 2 \sin x (\sin x + \cos x)$ 的最大值为 ()
 (A) $1 + \sqrt{2}$ (B) $\sqrt{2} - 1$ (C) $\sqrt{2}$ (D) 2
5. 已知圆 $C: (x-a)^2 + (y-2)^2 = 4$ ($a > 0$) 及直线 $l: x - y + 3 = 0$, 当直线 l 被 C 截得的弦长为 $2\sqrt{3}$ 时, a 的值等于 ()
 (A) $\sqrt{2}$ (B) $2 - \sqrt{2}$ (C) $\sqrt{2} - 1$ (D) $\sqrt{2} + 1$
6. 已知圆锥的底面半径为 R , 高为 $3R$, 在它的所有内接圆柱中, 全面积的最大值是 ()
 (A) $2\pi R^2$ (B) $\frac{9}{4}\pi R^2$ (C) $\frac{8}{3}\pi R^2$ (D) $\frac{3}{2}\pi R^2$
7. 已知方程 $(x^2 - 2x + m)(x^2 - 2x + n) = 0$ 的四个根组成一个首项为 $\frac{1}{4}$ 的等差数列, 则 $|m - n| =$ ()
 (A) 1 (B) $\frac{3}{4}$ (C) $\frac{1}{2}$ (D) $\frac{3}{8}$
8. 已知双曲线中心在原点且一个焦点为 $F(\sqrt{7}, 0)$, 直线 $y = x - 1$ 与其相交于 M, N 两点, MN 中点的横坐标为 $-\frac{2}{3}$, 则此双曲线的方程是 ()
 (A) $\frac{x^2}{3} - \frac{y^2}{4} = 1$ (B) $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{3} = 1$ (C) $\frac{x^2}{5} - \frac{y^2}{2} = 1$ (D) $\frac{x^2}{2} - \frac{y^2}{5} = 1$
9. 函数 $f(x) = \sin x, x \in [\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}]$ 的反函数 $f^{-1}(x) =$ ()
 (A) $-\arcsin x, x \in [-1, 1]$ (B) $-\pi - \arcsin x, x \in [-1, 1]$
 (C) $\pi + \arcsin x, x \in [-1, 1]$ (D) $\pi - \arcsin x, x \in [-1, 1]$
10. 已知长方形的四个顶点 $A(0, 0), B(2, 0), C(2, 1)$ 和 $D(0, 1)$, 一质点从 AB 的中点 P_0 沿与 AB 的夹角 θ 的方向射到 BC 上的点 P_1 后, 依次反射到 CD, DA 和 AB 上的点 P_2, P_3 和 P_4 (入射角等于反射角), 设 P_4 的坐标为 $(x_4, 0)$, 若 $1 < x_4 < 2$, 则 $\tan \theta$ 的取值范围是 ()
 (A) $(\frac{1}{3}, 1)$ (B) $(\frac{1}{3}, \frac{2}{3})$ (C) $(\frac{2}{5}, \frac{1}{2})$ (D) $(\frac{2}{5}, \frac{2}{3})$

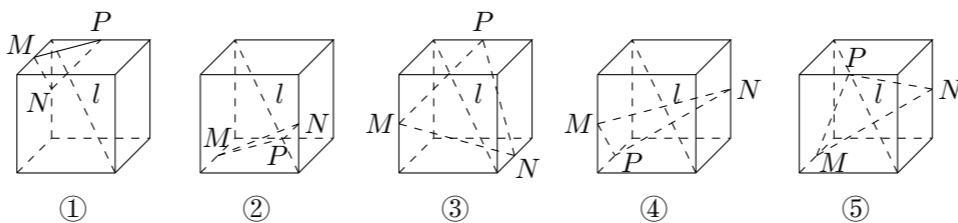
11. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{C_2^2 + C_3^2 + C_4^2 + \dots + C_n^2}{n(C_2^1 + C_3^1 + C_4^1 + \dots + C_n^1)} =$ ()
 (A) 3 (B) $\frac{1}{3}$ (C) $\frac{1}{6}$ (D) 6
12. 一个四面体的所有棱长都为 $\sqrt{2}$, 四个顶点在同一球面上, 则此球的表面积为 ()
 (A) 3π (B) 4π (C) $3\sqrt{3}\pi$ (D) 6π

二、填空题

13. $(x^2 - \frac{1}{2x})^9$ 的展开式中 x^9 系数是_____.
14. 使 $\log_2(-x) < x + 1$ 成立的 x 的取值范围是_____.
15. 如图, 一个地区分为 5 个行政区域, 现给地图着色, 要求相邻地区不得使用同一颜色, 现有 4 种颜色可供选择, 则不同的着色方法共有种_____. (以数字作答)



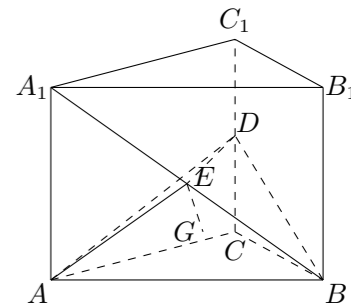
16. 下列 5 个正方体图形中, l 是正方体的一条对角线, 点 M, N, P 分别为其所在棱的中点, 能得出 $l \perp$ 面 MNP 的图形的序号是_____. (写出所有符合要求的图形序号)



三、解答题

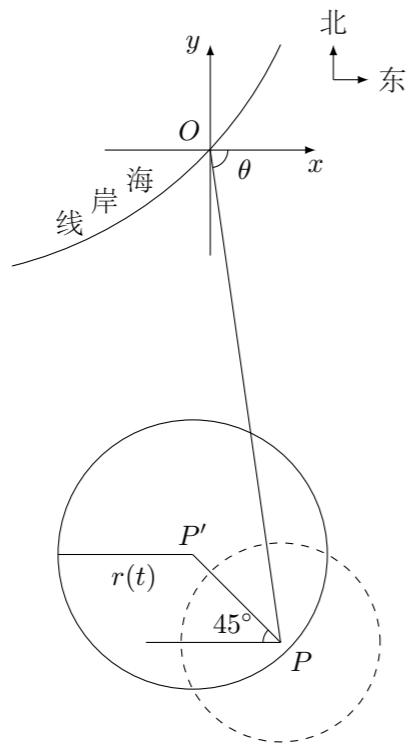
17. 已知复数 z 的辐角为 60° , 且 $|z - 1|$ 是 $|z|$ 和 $|z - 2|$ 的等比中项, 求 $|z|$.

18. 如图, 在直三棱柱 $ABC - A_1B_1C_1$ 中, 底面是等腰直角三角形, $\angle ACB = 90^\circ$, 侧棱 $AA_1 = 2$, D, E 分别是 CC_1 与 A_1B 的中点, 点 E 在平面 ABD 上的射影是 $\triangle ABD$ 的重心 G .
 (1) 求 A_1B 与平面 ABD 所成角的大小; (结果用反三角函数值表示)
 (2) 求点 A_1 到平面 AED 的距离.

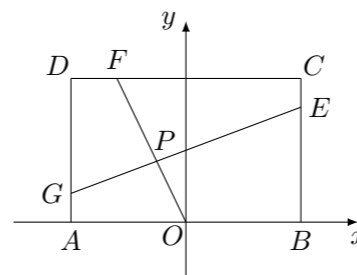


19. 已知 $c > 0$, 设 P : 函数 $y = c^x$ 在 \mathbf{R} 上单调递减; Q : 不等式 $x + |x - 2c| > 1$ 的解集为 \mathbf{R} . 如果 P 和 Q 有且仅有一个正确, 求 c 的取值范围.

20. 在某海滨城市附近海面有一台风, 据监测, 当前台风中心位于城市 O (如图) 的东偏南 θ ($\theta = \arccos \frac{\sqrt{2}}{10}$) 方向 300 km 的海面 P 处, 并以 20 km/h 的速度向西偏北 45° 方向移动, 台风侵袭的范围为圆形区域, 当前半径为 60 km, 并以 10 km/h 的速度不断增大, 问几小时后该城市开始受到台风的侵袭?



21. 已知常数 $a > 0$, 在矩形 $ABCD$ 中, $AB = 4$, $BC = 4a$, O 为 AB 的中点, 点 E 、 F 、 G 分别在 BC 、 CD 、 DA 上移动, 且 $\frac{BE}{BC} = \frac{CF}{CD} = \frac{DG}{DA}$, P 为 GE 与 OF 的交点 (如图), 问是否存在两个定点, 使 P 到这两点的距离的和为定值? 若存在, 求出这两点的坐标及此定值; 若不存在, 请说明理由.



22. 【甲】 设 $\{a_n\}$ 是集合 $\{2^s + 2^t \mid 0 \leq s < t \text{ 且 } s, t \in \mathbf{Z}\}$ 中所有的数从小到大排列成的数列, 即 $a_1 = 3, a_2 = 5, a_3 = 6, a_4 = 9, a_5 = 10, a_6 = 12, \dots$. 将数列 $\{a_n\}$ 各项按照上小下大, 左小右大的原则写成如下的三角形数表:

			3		
		5	6		
	9	10	12		
	-	-	-	-	
				

- (1) 写出这个三角形数表的第四行、第五行各数;
 (2) 求 a_{100} .

- 【乙】 设 $\{b_n\}$ 是集合 $\{2^r + 2^s + 2^t \mid 0 \leq r < s < t \text{ 且 } r, s, t \in \mathbf{Z}\}$ 中所有的数从小到大排列成的数列, 已知 $b_k = 1160$, 求 k .