2003 普通高等学校招生考试 (北京卷理)

一、选择题

1. 设集合 $A=\{x \mid x^2-1>0\}$, $B=\{x \mid \log_2 x>0\}$, $A\cap B$ 等于 ( )

(A) $\{x \mid x>1\}$ (B) $\{x \mid x>0\}$

(C) $\{x \mid x<-1\}$ (D) $\{x \mid x<-1$ 或 $x>1\}$

2. 设 $y_1=4^{0.9}$, $y_2=8^{0.44}$, $y_3=\left(\dfrac{1}{2}\right)^{-1.5}$, 则 ( )

(A) $y_3>y_1>y_2$ (B) $y_2>y_1>y_3$ (C) $y_1>y_2>y_3$ (D) $y_1>y_3>y_2$

3. "$\cos 2\alpha=-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$"是"$\alpha=k\pi+\dfrac{5\pi}{12}$, $k\in\mathbf{Z}$"的 ( )

(A) 必要非充分条件 (B) 充分非必要条件

(C) 充分必要条件 (D) 既非充分又非必要条件

4. 已知 α, β 是平面, m, n 是直线. 下列命题中不正确的是 ( )

(A) 若 $m\parallel n$, $m\perp\alpha$, 则 $n\perp\alpha$ (B) 若 $m\parallel\alpha$, $\alpha\cap\beta=n$, 则 $m\parallel n$

(C) 若 $m\perp\alpha$, $m\perp\beta$, 则 $\alpha\parallel\beta$ (D) 若 $m\perp\alpha$, $m\subset\beta$, 则 $\alpha\perp\beta$

5. 极坐标方程 $\rho^2\cos 2\theta-2\rho\cos\theta=1$ 表示的曲线是 ( )

(A) 圆 (B) 椭圆 (C) 抛物线 (D) 双曲线

6. 若 $z\in\mathbf{C}$ 且 $|z+2-2\mathrm{i}|=1$, 则 $|z-2-2\mathrm{i}|$ 的最小值是 ( )

(A) 2 (B) 3 (C) 4 (D) 5

7. 如果圆台的母线与底面成 60° 角, 那么这个圆台的侧面积与轴截面面积的比为 ( )

(A) 2π (B) $\dfrac{3}{2}\pi$ (C) $\dfrac{2\sqrt{3}}{3}\pi$ (D) $\dfrac{1}{2}\pi$

8. 从黄瓜、白菜、油菜、扁豆 4 种蔬菜品种中选出 3 种, 分别种在不同土质的三块土地上, 其中黄瓜必须种植, 不同的种植方法共有 ( )

(A) 24 种 (B) 18 种 (C) 12 种 (D) 6 种

9. 若数列 $\{a_n\}$ 的通项公式是 $a_n=\dfrac{3^{-n}+2^{-n}+(-1)^n(3^{-n}-2^{-n})}{2}$, $n=1$, 2, $\cdots$, 则 $\lim\limits_{n\to\infty}(a_1+a_2+\cdots+a_n)$ 等于 ( )

(A) $\dfrac{11}{24}$ (B) $\dfrac{17}{24}$ (C) $\dfrac{19}{24}$ (D) $\dfrac{25}{24}$

10. 某班试用电子投票系统选举班干部候选人. 全班 k 名同学都有选举权和被选举权, 他们的编号分别为 $1, 2, \cdots, k$, 规定: 同意按"1", 不同意 (含弃权) 按"0", 令 $a_{ij}=\begin{cases}1, & \text{第 } i \text{ 号同学同意第 } j \text{ 号同学当选},\\ 0, & \text{第 } i \text{ 号同学不同意第 } j \text{ 号同学当选},\end{cases}$ 其中 $i=1$, 2, $\cdots$, k, 且 $j=1, 2, \cdots, k$, 则同时同意第 1, 2 号同学当选的人数为 ( )

(A) $a_{11}+a_{12}+\cdots+a_{1k}+a_{21}+a_{22}+\cdots+a_{2k}$

(B) $a_{11}+a_{21}+\cdots+a_{1k}+a_{12}+a_{22}+\cdots+a_{k2}$

(C) $a_{11}a_{12}+a_{21}a_{22}+\cdots+a_{k1}a_{k2}$

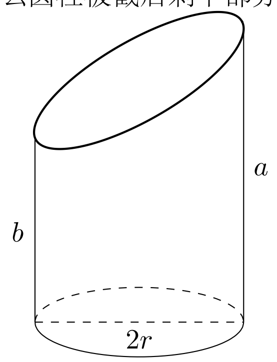
(D) $a_{11}a_{21}+a_{12}a_{22}+\cdots+a_{1k}a_{2k}$

二、填空题

11. 函数 $f(x)=\lg(1+x^2)$, $g(x)=\begin{cases}x+2, & x<-1,\\ 0, & |x|\leqslant 1,\\ -x+2, & x>1,\end{cases}$ $h(x)=\tan 2x$ 中, ______是偶函数.

12. 以双曲线 $\dfrac{x^2}{16}-\dfrac{y^2}{9}=1$ 右顶点为顶点, 左焦点为焦点的抛物线的方程是______.

13. 如图, 已知底面半径为 r 的圆柱被一个平面所截, 剩下部分母线长的最大值为 a, 最小值为 b, 那么圆柱被截后剩下部分的体积是______.



14. 将长度为 1 的铁丝分成两段, 分别围成一个正方形和一个圆形, 要使正方形与圆的面积之和最小, 正方形的周长应为______.

三、解答题

15. 已知函数 $f(x)=\cos^4 x-2\sin x\cos x-\sin^4 x$.

(1) 求 $f(x)$ 的最小正周期;

(2) 若 $x\in\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]$, 求 $f(x)$ 的最大值、最小值.

16. 已知数列 $\{a_n\}$ 是等差数列, 且 $a_1=2$, $a_1+a_2+a_3=12$.

(1) 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式;

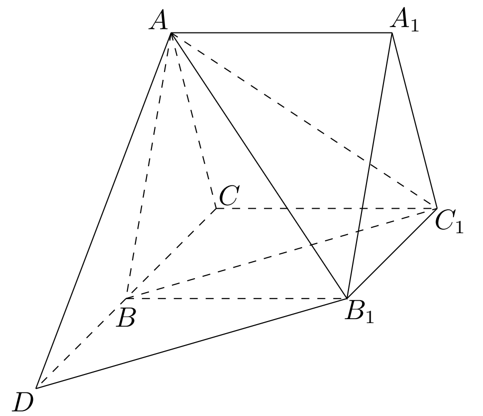
(2) 令 $b_n=a_nx^n$ $(x\in\mathbf{R})$. 求数列 $\{b_n\}$ 前 n 项和的公式.

17. 如图, 正三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 的底面边长的 3, 侧棱 $AA_1=\dfrac{3\sqrt{3}}{2}$, D 是 CB 延长线上一点, 且 $BD=BC$.

(1) 求证: 直线 $BC_1\parallel$ 平面 AB_1D;

(2) 求二面角 B_1-AD-B 的大小;

(3) 求三棱锥 C_1-ABB_1 的体积.

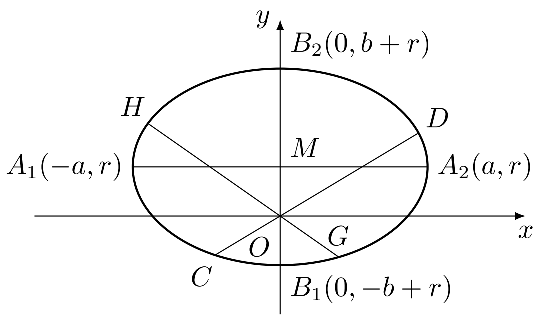


18. 如图, 椭圆的长轴 A_1A_2 与 x 轴平行, 短轴 B_1B_2 在 y 轴上, 中心为 $M(0,r)$ $(b>r>0)$.

(1) 写出椭圆的方程, 求椭圆的焦点坐标及离心率;

(2) 直线 $y=k_1x$ 交椭圆于两点 $C(x_1,y_1)$, $D(x_2,y_2)$ $(y_2>0)$; 直线 $y=k_2x$ 交椭圆于两点 $G(x_3,y_3)$, $H(x_4,y_4)$ $(y_4>0)$. 求证: $\dfrac{k_1x_1x_2}{x_1+x_2}=\dfrac{k_2x_3x_4}{x_3+x_4}$;

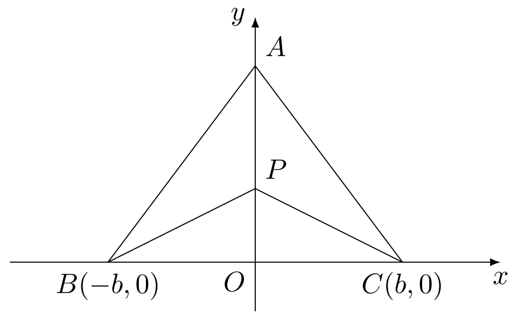
(3) 对于 (2) 中的 C, D, G, H, 设 CH 交 x 轴于点 P, GD 交 x 轴于点 Q. 求证: $|OP|=|OQ|$. (证明过程不考虑 CH 或 GD 垂直于 x 轴的情形)



19. 有三个新兴城镇, 分别位于 A, B, C 三点处, 且 $AB=AC=a$, $BC=2b$. 今计划合建一个中心医院, 为同时方便三镇, 准备建在 BC 的垂直平分线上的 P 点处. (建立坐标系如图)

(1) 若希望点 P 到三镇距离的平方和为最小, 点 P 应位于何处?

(2) 若希望点 P 到三镇的最远距离为最小, 点 P 应位于何处?



20. 设 $y=f(x)$ 是定义在区间 $[-1,1]$ 上的函数, 且满足条件:

① $f(-1)=f(1)=0$;

② 对任意的 u, $v\in[-1,1]$, 都有 $|f(u)-f(v)|\leqslant|u-v|$.

(1) 证明: 对任意的 $x\in[-1,1]$, $x-1\leqslant f(x)\leqslant 1-x$;

(2) 证明: 对任意的 u, $v\in[-1,1]$, $|f(u)-f(v)|\leqslant 1$;

(3) 在区间 $[-1,1]$ 上是否存在满足题设条件的奇函数 $y=f(x)$, 且使得 $\begin{cases}|f(u)-f(v)|<|u-v|, & u,\ v\in\left[0,\dfrac{1}{2}\right],\\ |f(u)-f(v)|=|u-v|, & u,\ v\in\left[\dfrac{1}{2},1\right],\end{cases}$ 若存在, 请举一例; 若不存在, 请说明理由.