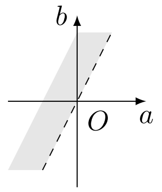
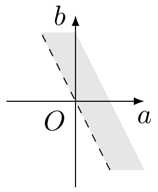
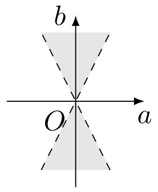
2003 普通高等学校招生考试 (江苏卷)

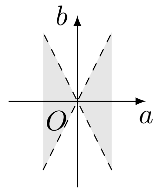
一、选择题

1. 如果函数 $y=ax^2+bx+a$ 的图象与 x 轴有两个交点, 则点 (a,b) 在 aOb 平面上的区域 (不包含边界) 为 ( )



(A)


(B)


(C)


(D)

2. 抛物线 $y=ax^2$ 的准线方程是 $y=2$, 则 a 的值为 ( )

(A) $\frac{1}{8}$ (B) $-\frac{1}{8}$ (C) 8 (D) -8

3. 已知 $x\in\left(-\frac{\pi}{2},0\right)$, $\cos x=\frac{4}{5}$, 则 $\tan 2x=$ ( )

(A) $\frac{7}{24}$ (B) $-\frac{7}{24}$ (C) $\frac{24}{7}$ (D) $-\frac{24}{7}$

4. 设函数 $f(x)=\begin{cases}2^{-x}-1, & x\leqslant 0,\\ x^{\frac{1}{2}}, & x>0,\end{cases}$ 若 $f(x_0)>1$, 则 x_0 的取值范围是 ( )

(A) $(-1,1)$ (B) $(-1,+\infty)$

(C) $(-\infty,-2)\cup(0,+\infty)$ (D) $(-\infty,-1)\cup(1,+\infty)$

5. O 是平面上一定点, A、B、C 是平面上不共线的三个点, 动点 P 满足 $\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{OA}+\lambda\left(\frac{\overrightarrow{AB}}{|\overrightarrow{AB}|}+\frac{\overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AC}|}\right)$, $\lambda\in[0,+\infty)$, 则 P 的轨迹一定通过 $\triangle ABC$ 的

(A) 外心 (B) 内心 (C) 重心 (D) 垂心

6. 函数 $y=\ln\frac{x+1}{x-1}$, $x\in(1,+\infty)$ 的反函数为 ( )

(A) $y=\frac{\mathrm{e}^x-1}{\mathrm{e}^x+1}$, $x\in(0,+\infty)$ (B) $y=\frac{\mathrm{e}^x+1}{\mathrm{e}^x-1}$, $x\in(0,+\infty)$

(C) $y=\frac{\mathrm{e}^x-1}{\mathrm{e}^x+1}$, $x\in(-\infty,0)$ (D) $y=\frac{\mathrm{e}^x+1}{\mathrm{e}^x-1}$, $x\in(-\infty,0)$

7. 棱长为 a 的正方体中, 连结相邻面的中心, 以这些线段为棱的八面体的体积为 ( )

(A) $\frac{a^3}{3}$ (B) $\frac{a^3}{4}$ (C) $\frac{a^3}{6}$ (D) $\frac{a^3}{12}$

8. 设 $a>0$, $f(x)=ax^2+bx+c$, 曲线 $y=f(x)$ 在点 $P(x_0,f(x_0))$ 处切线的倾斜角的取值范围为 $\left[0,\frac{\pi}{4}\right]$, 则 P 到曲线 $y=f(x)$ 对称轴距离的取值范围为 ( )

(A) $\left[0,\frac{1}{a}\right]$ (B) $\left[0,\frac{1}{2a}\right]$ (C) $\left[0,\left|\frac{b}{2a}\right|\right]$ (D) $\left[0,\left|\frac{b-1}{2a}\right|\right]$

9. 已知方程 $(x^2-2x+m)(x^2-2x+n)=0$ 的四个根组成一个首项为 $\frac{1}{4}$ 的的等差数列, 则 $|m-n|=$ ( )

(A) 1 (B) $\frac{3}{4}$ (C) $\frac{1}{2}$ (D) $\frac{3}{8}$

10. 已知双曲线中心在原点且一个焦点为 $F(\sqrt{7},0)$, 直线 $y=x-1$ 与其相交于 M、N 两点, MN 中点的横坐标为 $-\frac{2}{3}$, 则此双曲线的方程是 ( )

(A) $\frac{x^2}{3}-\frac{y^2}{4}=1$ (B) $\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{3}=1$ (C) $\frac{x^2}{5}-\frac{y^2}{2}=1$ (D) $\frac{x^2}{2}-\frac{y^2}{5}=1$

11. 已知长方形的四个顶点 $A(0,0)$, $B(2,0)$, $C(2,1)$ 和 $D(0,1)$, 一质点从 AB 的中点 P_0 沿与 AB 的夹角 θ 的方向射到 BC 上的点 P_1 后, 依次反射到 CD、DA 和 AB 上的点 P_2、P_3 和 P_4 (入射角等于反射角), 设 P_4 的坐标为 $(x_4,0)$, 若 $1<x_4<2$, 则 $\tan\theta$ 的取值范围是 ( )

(A) $\left(\frac{1}{3},1\right)$ (B) $\left(\frac{1}{3},\frac{2}{3}\right)$ (C) $\left(\frac{2}{5},\frac{1}{2}\right)$ (D) $\left(\frac{2}{5},\frac{2}{3}\right)$

12. 一个四面体的所有棱长都为 $\sqrt{2}$, 四个顶点在同一球面上, 则此球的表面积为 ( )

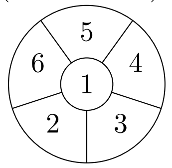
(A) 3π (B) 4π (C) $3\sqrt{3}\pi$ (D) 6π

二、填空题

13. $\left(x^2-\frac{1}{2x}\right)^9$ 的展开式中 x^9 系数是______.

14. 某公司生产三种型号的轿车, 产量分别为 1200 辆, 6000 辆和 2000 辆. 为检验该公司的产品质量, 现用分层抽样的方法抽取 46 辆进行检验, 这三种型号的轿车依次应抽取______, ______, ______辆.

15. 某城市在中心广场建造一个花圃, 花圃分为 6 个部分 (如图). 现要栽种 4 种不同颜色的花, 每部分栽种一种且相邻部分不能栽种同样颜色的花, 不同的栽种方法有______种. (以数字作答)



16. 对于四面体 $ABCD$, 给出下列四个命题: ① 若 $AB=AC$, $BD=CD$, 则 $BC\perp AD$; ② 若 $AB=CD$, $AC=BD$, 则 $BC\perp AD$; ③ 若 $AB\perp AC$, $BD\perp CD$, 则 $BC\perp AD$; ④ 若 $AB\perp CD$, $AC\perp BD$, 则 $BC\perp AD$. 其中真命题的序号是______. (写出所有真命题的序号)

三、解答题

17. 有三种产品, 合格率分别为 0.90, 0.95 和 0.95, 各抽取一件进行检验.

(1) 求恰有一件不合格的概率;

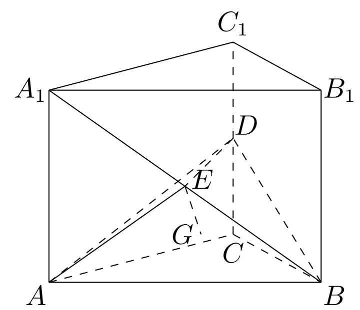
(2) 求至少有两件不合格的概率. (精确到 0.001)

18. 已知函数 $f(x)=\sin(\omega x+\varphi)$ $(\omega>0,\ 0\leqslant\varphi\leqslant\pi)$ 是 $\mathbf{R}$ 上的偶函数, 其图象关于点 $M\left(\frac{3\pi}{4},0\right)$ 对称, 且在区间 $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ 上是单调函数. 求 ω 和 φ 的值.

19. 如图, 在直三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中, 底面是等腰直角三角形, $\angle ACB=90°$, 侧棱 $AA_1=2$, D、E 分别是 CC_1 与 A_1B 的中点, 点 E 在平面 ABD 上的射影是 $\triangle ABD$ 的重心 G.

(1) 求 A_1B 与平面 ABD 所成角的大小; (结果用反三角函数值表示)

(2) 求点 A_1 到平面 AED 的距离.



20. 已知常数 $a>0$, 向量 $\overrightarrow{c}=(0,a)$, $\overrightarrow{i}=(1,0)$. 经过原点 O 以 $\overrightarrow{c}+\lambda\overrightarrow{i}$ 为方向向量的直线与经过定点 $A(0,a)$ 以 $\overrightarrow{i}-2\lambda\overrightarrow{c}$ 为方向向量的直线相交于 P, 其中 $\lambda\in\mathbf{R}$. 试问: 是否存在两个定点 E、F, 使得 $|PE|+|PF|$ 为定值. 若存在, 求出 E、F 的坐标; 若不存在, 说明理由.

21. 已知 $a>0$, n 为正整数.

(1) 设 $y=(x-a)^n$, 证明: $y'=n(x-a)^{n-1}$;

(2) 设 $f_n(x)=x^n-(x-a)^n$, 对任意 $n\geqslant a$, 证明: $f'_{n+1}(n+1)>(n+1)f'_n(n)$.

22. 设 $a>0$, 如图, 已知直线 l: $y=ax$ 及曲线 $C:y=x^2$, C 上的点 Q_1 的横坐标为 a_1 $(0<a_1<a)$. 从 C 上的点 Q_n $(n\geqslant 1)$ 作直线平行于 x 轴, 交直线 l 于点 P_{n+1}, 再从点 P_{n+1} 作直线平行于 y 轴, 交曲线 C 于点 Q_{n+1}. Q_n $(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$ 的横坐标构成数列 $\{a_n\}$.

(1) 试求 a_{n+1} 与 a_n 的关系, 并求 $\{a_n\}$ 的通项公式;

(2) 当 $a=1$, $a_1\leqslant\dfrac{1}{2}$ 时, 证明: $\sum\limits_{k=1}^{n}(a_k-a_{k+1})a_{k+2}<\dfrac{1}{32}$;

(3) 当 $a=1$ 时, 证明: $\sum\limits_{k=1}^{n}(a_k-a_{k+1})a_{k+2}<\dfrac{1}{3}$.