2003 普通高等学校招生考试 (辽宁卷)

一、选择题

1. 与曲线 $y=\dfrac{1}{x-1}$ 关于原点对称的曲线为 ( )

(A) $y=\dfrac{1}{1+x}$ (B) $y=-\dfrac{1}{1+x}$ (C) $y=\dfrac{1}{1-x}$ (D) $y=-\dfrac{1}{1-x}$

2. 已知 $x\in\left(-\dfrac{\pi}{2},0\right)$, $\cos x=\dfrac{4}{5}$, 则 $\tan 2x=$ ( )

(A) $\dfrac{7}{24}$ (B) $-\dfrac{7}{24}$ (C) $\dfrac{24}{7}$ (D) $-\dfrac{24}{7}$

3. $\dfrac{1-\sqrt{3}\mathrm{i}}{(\sqrt{3}+\mathrm{i})^2}=$ ( )

(A) $\dfrac{1}{4}+\dfrac{\sqrt{3}}{4}\mathrm{i}$ (B) $-\dfrac{1}{4}-\dfrac{\sqrt{3}}{4}\mathrm{i}$ (C) $\dfrac{1}{2}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}$ (D) $-\dfrac{1}{2}-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}$

4. 已知四边形 $ABCD$ 是菱形, 点 P 在对角线 AC 上 (不包括端点 A、C), 则 $\overrightarrow{AP}=$ ( )

(A) $\lambda(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD})$, $\lambda\in(0,1)$ (B) $\lambda(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC})$, $\lambda\in\left(0,\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$

(C) $\lambda(\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AD})$, $\lambda\in(0,1)$ (D) $\lambda(\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{BC})$, $\lambda\in\left(0,\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$

5. 设函数 $f(x)=\begin{cases}2^{-x}-1, & x\leqslant 0,\\ x^{\frac{1}{2}}, & x>0,\end{cases}$ 若 $f(x_0)>1$, 则 x_0 的取值范围是 ( )

(A) $(-1,1)$ (B) $(-1,+\infty)$

(C) $(-\infty,-2)\cup(0,+\infty)$ (D) $(-\infty,-1)\cup(1,+\infty)$

6. 等差数列 $\{a_n\}$ 中, 已知 $a_1=\dfrac{1}{3}$, $a_2+a_5=4$, $a_n=33$, 则 n 为 ( )

(A) 48 (B) 49 (C) 50 (D) 51

7. 函数 $y=\ln\dfrac{x+1}{x-1}$, $x\in(1,+\infty)$ 的反函数为 ( )

(A) $y=\dfrac{\mathrm{e}^x-1}{\mathrm{e}^x+1}$, $x\in(0,+\infty)$ (B) $y=\dfrac{\mathrm{e}^x+1}{\mathrm{e}^x-1}$, $x\in(0,+\infty)$

(C) $y=\dfrac{\mathrm{e}^x-1}{\mathrm{e}^x+1}$, $x\in(-\infty,0)$ (D) $y=\dfrac{\mathrm{e}^x+1}{\mathrm{e}^x-1}$, $x\in(-\infty,0)$

8. 棱长为 a 的正方体中, 连结相邻面的中心, 以这些线段为棱的八面体的体积为 ( )

(A) $\dfrac{a^3}{3}$ (B) $\dfrac{a^3}{4}$ (C) $\dfrac{a^3}{6}$ (D) $\dfrac{a^3}{12}$

9. 设 $a>0$, $f(x)=ax^2+bx+c$, 曲线 $y=f(x)$ 在点 $P(x_0,f(x_0))$ 处切线的倾斜角的取值范围为 $\left[0,\dfrac{\pi}{4}\right]$, 则 P 到曲线 $y=f(x)$ 对称轴距离的取值范围为 ( )

(A) $\left[0,\dfrac{1}{a}\right]$ (B) $\left[0,\dfrac{1}{2a}\right]$ (C) $\left[0,\left|\dfrac{b}{2a}\right|\right]$ (D) $\left[0,\left|\dfrac{b-1}{2a}\right|\right]$

10. 已知双曲线中心在原点且一个焦点为 $F(\sqrt{7},0)$, 直线 $y=x-1$ 与其相交于 M、N 两点, MN 中点的横坐标为 $-\dfrac{2}{3}$, 则此双曲线的方程是 ( )

(A) $\dfrac{x^2}{3}-\dfrac{y^2}{4}=1$ (B) $\dfrac{x^2}{4}-\dfrac{y^2}{3}=1$ (C) $\dfrac{x^2}{5}-\dfrac{y^2}{2}=1$ (D) $\dfrac{x^2}{2}-\dfrac{y^2}{5}=1$

11. 已知长方形的四个顶点 $A(0,0)$, $B(2,0)$, $C(2,1)$ 和 $D(0,1)$, 一质点从 AB 的中点 P_0 沿与 AB 的夹角 θ 的方向射到 BC 上的点 P_1 后, 依次反射到 CD、DA 和 AB 上的点 P_2、P_3 和 P_4 (入射角等于反射角), 设 P_4 的坐标为 $(x_4,0)$, 若 $1<x_4<2$, 则 $\tan\theta$ 的取值范围是 ( )

(A) $\left(\dfrac{1}{3},1\right)$ (B) $\left(\dfrac{1}{3},\dfrac{2}{3}\right)$ (C) $\left(\dfrac{2}{5},\dfrac{1}{2}\right)$ (D) $\left(\dfrac{2}{5},\dfrac{2}{3}\right)$

12. 一个四面体的所有棱长都为 $\sqrt{2}$, 四个顶点在同一球面上, 则此球的表面积为 ( )

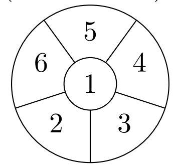
(A) 3π (B) 4π (C) $3\sqrt{3}\pi$ (D) 6π

二、填空题

13. $\left(x^2-\dfrac{1}{2x}\right)^9$ 的展开式中 x^9 系数是______.

14. 某公司生产三种型号的轿车, 产量分别为 1200 辆, 6000 辆和 2000 辆. 为检验该公司的产品质量, 现用分层抽样的方法抽取 46 辆进行检验, 这三种型号的轿车依次应抽取______, ______, ______辆.

15. 某城市在中心广场建造一个花圃, 花圃分为 6 个部分 (如图). 现要栽种 4 种不同颜色的花, 每部分栽种一种且相邻部分不能栽种同样颜色的花, 不同的栽种方法有______种. (以数字作答)



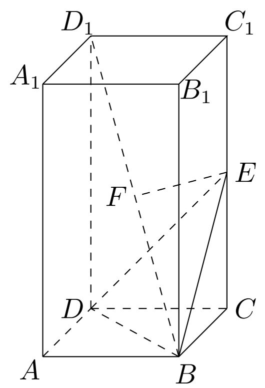
16. 对于四面体 $ABCD$, 给出下列四个命题: ① 若 $AB=AC$, $BD=CD$, 则 $BC\perp AD$; ② 若 $AB=CD$, $AC=BD$, 则 $BC\perp AD$; ③ 若 $AB\perp AC$, $BD\perp CD$, 则 $BC\perp AD$; ④ 若 $AB\perp CD$, $AC\perp BD$, 则 $BC\perp AD$. 其中真命题的序号是______. (写出所有真命题的序号)

三、解答题

17. 已知正四棱柱 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$, $AB=1$, $AA_1=2$, E 为 CC_1 中点, F 为 BD_1 中点.

(1) 证明: EF 为 BD_1 与 CC_1 的公垂线;

(2) 求点 D_1 到面 BDE 的距离.



18. 已知函数 $f(x)=\sin(\omega x+\varphi)$ $(\omega>0,\ 0\leqslant\varphi\leqslant\pi)$ 是 $\mathbf{R}$ 上的偶函数, 其图象关于点 $M\left(\dfrac{3\pi}{4},0\right)$ 对称, 且在区间 $\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]$ 上是单调函数. 求 ω 和 φ 的值.

19. 设 $a>0$, 求函数 $f(x)=\sqrt{x}-\ln(x+a)$, $x\in(0,+\infty)$ 的单调区间.

20. A、B 两个代表队进行乒乓球对抗赛, 每队三名队员, A 队队员是 A_1, A_2, A_3, B 队队员是 B_1, B_2, B_3, 按以往多次比赛的统计, 对阵队员之间胜负概率如下:

对阵队员	A 队队员胜的概率	A 队队员负的概率
A_1 对 B_1	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$
A_2 对 B_2	$\frac{2}{5}$	$\frac{3}{5}$
A_3 对 B_3	$\frac{2}{5}$	$\frac{3}{5}$

现按表中对阵方式出场, 每场胜队得 1 分, 负队得 0 分, 设 A 队、B 队最后所得总分分别为 ξ、η.

(1) 求 ξ、η 的概率分布;

(2) 求 $E\xi$, E_η.

21. 设 a_0 为常数, 且 $a_n = 3^{n-1} - 2a_{n-1}$ $(n \in \mathbf{N}^*)$.

(1) 证明对任意 $n \geqslant 1$, $a_n = \frac{1}{5}[3^n + (-1)^{n-1} \cdot 2^n] + (-1)^n \cdot 2^n a_0$;

(2) 假设对任意 $n \geqslant 1$ 有 $a_n > a_{n-1}$, 求 a_0 的取值范围.

22. 已知常数 $a > 0$, 向量 $\vec{c} = (0, a)$, $\vec{i} = (1, 0)$. 经过原点 O 以 $\vec{c} + \lambda \vec{i}$ 为方向向量的直线与经过定点 $A(0, a)$ 以 $\vec{i} - 2\lambda \vec{c}$ 为方向向量的直线相交于 P, 其中 $\lambda \in \mathbf{R}$. 试问: 是否存在两个定点 E、F, 使得 $|PE| + |PF|$ 为定值. 若存在, 求出 E、F 的坐标; 若不存在, 说明理由.