

## 2004 普通高等学校招生考试 (全国卷 I 文)

### 一、选择题

1. 设集合  $U = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ ,  $A = \{1, 2, 3\}$ ,  $B = \{2, 5\}$ , 则  $A \cap (\complement_U B) =$  ( )  
 (A)  $\{2\}$  (B)  $\{2, 3\}$  (C)  $\{3\}$  (D)  $\{1, 3\}$
2. 已知函数  $f(x) = \lg \frac{1-x}{1+x}$ , 若  $f(a) = \frac{1}{2}$ , 则  $f(-a) =$  ( )  
 (A)  $\frac{1}{2}$  (B)  $-\frac{1}{2}$  (C) 2 (D) -2
3. 已知  $\mathbf{a}$ 、 $\mathbf{b}$  均为单位向量, 它们的夹角为  $60^\circ$ , 那么  $|\mathbf{a} + 3\mathbf{b}| =$  ( )  
 (A)  $\sqrt{7}$  (B)  $\sqrt{10}$  (C)  $\sqrt{13}$  (D) 4
4. 函数  $y = \sqrt{x-1} + 1$  ( $x \geq 1$ ) 的反函数是 ( )  
 (A)  $y = x^2 - 2x + 2$  ( $x < 1$ ) (B)  $y = x^2 - 2x + 2$  ( $x \geq 1$ )  
 (C)  $y = x^2 - 2x$  ( $x < 1$ ) (D)  $y = x^2 - 2x$  ( $x \geq 1$ )
5.  $\left(2x^3 - \frac{1}{\sqrt{x}}\right)^7$  的展开式中常数项是 ( )  
 (A) 14 (B) -14 (C) 42 (D) -42
6. 设  $\alpha \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ , 若  $\sin \alpha = \frac{3}{5}$ , 则  $\sqrt{2} \cos\left(\alpha + \frac{\pi}{4}\right) =$  ( )  
 (A)  $\frac{7}{5}$  (B)  $\frac{1}{5}$  (C)  $-\frac{7}{5}$  (D)  $-\frac{1}{5}$
7. 椭圆  $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$  的两个焦点为  $F_1$ 、 $F_2$ , 过  $F_1$  作垂直于  $x$  轴的直线与椭圆相交, 一个交点为  $P$ , 则  $|\overrightarrow{PF_2}| =$  ( )  
 (A)  $\frac{\sqrt{3}}{2}$  (B)  $\sqrt{3}$  (C)  $\frac{7}{2}$  (D) 4
8. 设抛物线  $y^2 = 8x$  的准线与  $x$  轴交于点  $Q$ , 若过点  $Q$  的直线  $l$  与抛物线有公共点, 则直线  $l$  的斜率的取值范围是 ( )  
 (A)  $\left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$  (B)  $[-2, 2]$  (C)  $[-1, 1]$  (D)  $[-4, 4]$
9. 为了得到函数  $y = \sin\left(2x - \frac{\pi}{6}\right)$  的图象, 可以将函数  $y = \cos 2x$  的图象 ( )  
 (A) 向右平移  $\frac{\pi}{6}$  个单位长度 (B) 向右平移  $\frac{\pi}{3}$  个单位长度  
 (C) 向左平移  $\frac{\pi}{6}$  个单位长度 (D) 向左平移  $\frac{\pi}{3}$  个单位长度
10. 已知正四面体  $ABCD$  的表面积为  $S$ , 其四个面的中心分别为  $E$ 、 $F$ 、 $G$ 、 $H$ . 设四面体  $EFGH$  的表面积为  $T$ , 则  $\frac{T}{S}$  等于 ( )  
 (A)  $\frac{1}{9}$  (B)  $\frac{4}{9}$  (C)  $\frac{1}{4}$  (D)  $\frac{1}{3}$

11. 从数字 1, 2,  $\dots$ , 9, 中, 随机抽取 3 个不同的数, 则这 3 个数的和为偶数的概率为 ( )  
 (A)  $\frac{5}{9}$  (B)  $\frac{4}{9}$  (C)  $\frac{11}{21}$  (D)  $\frac{10}{21}$
12.  $a^2 + b^2 = 1$ ,  $b^2 + c^2 = 2$ ,  $c^2 + a^2 = 2$ ,  $ab + bc + ca$  的最小值为 ( )  
 (A)  $\sqrt{3} - \frac{1}{2}$  (B)  $\frac{1}{2} - \sqrt{3}$  (C)  $-\frac{1}{2} - \sqrt{3}$  (D)  $\frac{1}{2} + \sqrt{3}$

### 二、填空题

13. 不等式  $x + x^3 \geq 0$  的解集是\_\_\_\_\_.
14. 已知等比数列  $\{a_n\}$  中,  $a_3 = 3$ ,  $a_{10} = 384$ , 则该数列的通项  $a_n =$ \_\_\_\_\_.
15. 由动点  $P$  向圆  $x^2 + y^2 = 1$  引两条切线  $PA$ 、 $PB$ , 切点分别为  $A$ 、 $B$ ,  $\angle APB = 60^\circ$ , 则动点  $P$  的轨迹方程为\_\_\_\_\_.
16. 已知  $a$ 、 $b$  为不垂直的异面直线,  $\alpha$  是一个平面, 则  $a$ 、 $b$  在  $\alpha$  上的射影有可能是:  
 ① 两条平行直线;  
 ② 两条互相垂直的直线;  
 ③ 同一条直线;  
 ④ 一条直线及其外一点.  
 在上面结论中, 正确结论的编号是\_\_\_\_\_. (写出所有正确结论的编号)

### 三、解答题

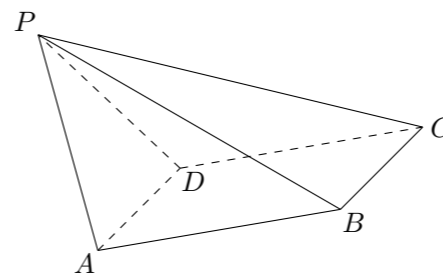
17. 等差数列  $\{a_n\}$  的前  $n$  项和记为  $S_n$ . 已知  $a_{10} = 30$ ,  $a_{20} = 50$ .  
 (1) 求通项  $a_n$ ;  
 (2) 若  $S_n = 242$ , 求  $n$ .

18. 求函数  $f(x) = \frac{\sin^4 x + \cos^4 x + \sin^2 x \cos^2 x}{2 - \sin 2x}$  的最小正周期、最大值和最小值.

19. 已知  $f(x) = ax^3 + 3x^2 - x + 1$  在  $\mathbf{R}$  上是减函数, 求  $a$  的取值范围.

20. 从 10 位同学 (其中 6 女, 4 男) 中随机选出 3 位参加测验. 每位女同学能通过测验的概率均为  $\frac{4}{5}$ , 每位男同学能通过测验的概率均为  $\frac{3}{5}$ . 试求:
- (1) 选出的 3 位同学中, 至少有一位男同学的概率;
  - (2) 10 位同学中的女同学甲和男同学乙同时被选中且通过测验的概率.

21. 如图, 已知四棱锥  $P-ABCD$ ,  $PB \perp AD$ , 侧面  $PAD$  为边长等于 2 的正三角形, 底面  $ABCD$  为菱形, 侧面  $PAD$  与底面  $ABCD$  所成的二面角为  $120^\circ$ .
- (1) 求点  $P$  到平面  $ABCD$  的距离;
  - (2) 求面  $APB$  与面  $CPB$  所成二面角的大小.



22. 设双曲线  $C: \frac{x^2}{a^2} - y^2 = 1$  ( $a > 0$ ) 与直线  $l: x + y = 1$  相交于两个不同的点  $A, B$ .
- (1) 求双曲线  $C$  的离心率  $e$  的取值范围;
  - (2) 设直线  $l$  与  $y$  轴的交点为  $P$ , 且  $\overrightarrow{PA} = \frac{5}{12}\overrightarrow{PB}$ . 求  $a$  的值.