

## 2004 普通高等学校招生考试 (全国卷 II 文)

### 一、选择题

1. 已知集合  $M = \{x \mid x^2 < 4\}$ ,  $N = \{x \mid x^2 - 2x - 3 < 0\}$ , 则集合  $M \cap N =$  ( )  
 (A)  $\{x \mid x < -2\}$  (B)  $\{x \mid x > 3\}$   
 (C)  $\{x \mid -1 < x < 2\}$  (D)  $\{x \mid 2 < x < 3\}$
2. 函数  $y = \frac{1}{x+5}$  ( $x \neq -5$ ) 的反函数是 ( )  
 (A)  $y = \frac{1}{x} - 5$  ( $x \neq 0$ ) (B)  $y = x + 5$  ( $x \in \mathbf{R}$ )  
 (C)  $y = \frac{1}{x} + 5$  ( $x \neq 0$ ) (D)  $y = x - 5$  ( $x \in \mathbf{R}$ )
3. 曲线  $y = x^3 - 3x^2 + 1$  在点  $(1, -1)$  处的切线方程为 ( )  
 (A)  $y = 3x - 4$  (B)  $y = -3x + 2$  (C)  $y = -4x + 3$  (D)  $y = 4x - 5$
4. 已知圆  $C$  与圆  $(x-1)^2 + y^2 = 1$  关于直线  $y = -x$  对称, 则圆  $C$  的方程为 ( )  
 (A)  $(x+1)^2 + y^2 = 1$  (B)  $x^2 + y^2 = 1$   
 (C)  $x^2 + (y+1)^2 = 1$  (D)  $x^2 + (y-1)^2 = 1$
5. 已知函数  $y = \tan(2x + \varphi)$  的图象过点  $(\frac{\pi}{12}, 0)$ , 则  $\varphi$  可以是 ( )  
 (A)  $-\frac{\pi}{6}$  (B)  $\frac{\pi}{6}$  (C)  $-\frac{\pi}{12}$  (D)  $\frac{\pi}{12}$
6. 正四棱锥的侧棱长与底面边长都是 1, 则侧棱与底面所成的角为 ( )  
 (A)  $75^\circ$  (B)  $60^\circ$  (C)  $45^\circ$  (D)  $30^\circ$
7. 函数  $y = -e^x$  的图象 ( )  
 (A) 与  $y = e^x$  的图象关于  $y$  轴对称  
 (B) 与  $y = e^x$  的图象关于坐标原点对称  
 (C) 与  $y = e^{-x}$  的图象关于  $y$  轴对称  
 (D) 与  $y = e^{-x}$  的图象关于坐标原点对称
8. 已知点  $A(1, 2)$ ,  $B(3, 1)$ , 则线段  $AB$  的垂直平分线的方程为 ( )  
 (A)  $4x + 2y = 5$  (B)  $4x - 2y = 5$  (C)  $x + 2y = 5$  (D)  $x - 2y = 5$
9. 已知向量  $\mathbf{a}$ 、 $\mathbf{b}$  满足:  $|\mathbf{a}| = 1$ ,  $|\mathbf{b}| = 2$ ,  $|\mathbf{a} - \mathbf{b}| = 2$ , 则  $|\mathbf{a}| + |\mathbf{b}| =$  ( )  
 (A) 1 (B)  $\sqrt{2}$  (C)  $\sqrt{5}$  (D)  $\sqrt{6}$
10. 已知球  $O$  的半径为 1,  $A$ 、 $B$ 、 $C$  三点都在球面上, 且每两点间的球面距离为  $\frac{\pi}{2}$ , 则球心  $O$  到平面  $ABC$  的距离为 ( )  
 (A)  $\frac{1}{3}$  (B)  $\frac{\sqrt{3}}{3}$  (C)  $\frac{2}{3}$  (D)  $\frac{\sqrt{6}}{3}$

11. 函数  $y = \sin^4 x + \cos^2 x$  的最小正周期为 ( )  
 (A)  $\frac{\pi}{4}$  (B)  $\frac{\pi}{2}$  (C)  $\pi$  (D)  $2\pi$
12. 在由数字 1, 2, 3, 4, 5 组成的所有没有重复数字的 5 位数中, 大于 23145 且小于 43521 的数共有 ( )  
 (A) 56 个 (B) 57 个 (C) 58 个 (D) 60 个

### 二、填空题

13. 已知  $a$  为实数,  $(x+a)^{10}$  展开式中  $x^7$  的系数是  $-15$ , 则  $a =$ \_\_\_\_\_.
14. 设  $x, y$  满足约束条件  $\begin{cases} x \geq 0, \\ x \geq y, \\ 2x - y \leq 1, \end{cases}$  则  $z = 3x + 2y$  的最大值是\_\_\_\_\_.
15. 设中心在原点的椭圆与双曲线  $2x^2 - 2y^2 = 1$  有公共的焦点, 且它们的离心率互为倒数, 则该椭圆的方程是\_\_\_\_\_.
16. 下面是关于四棱柱的四个命题:  
 ① 若有两个侧面垂直于底面, 则该四棱柱为直四棱柱;  
 ② 若两个过相对侧棱的截面都垂直于底面, 则该四棱柱为直四棱柱;  
 ③ 若四个侧面两两全等, 则该四棱柱为直四棱柱;  
 ④ 若四棱柱的四条对角线两两相等, 则该四棱柱为直四棱柱.  
 其中, 真命题的编号是\_\_\_\_\_. (写出所有真命题的编号)

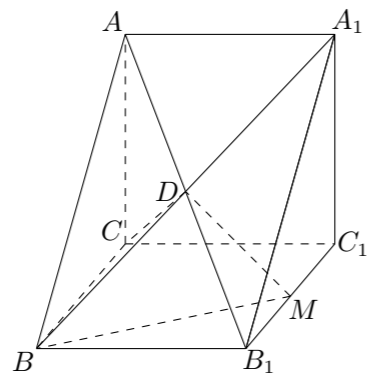
### 三、解答题

17. 已知等差数列  $\{a_n\}$ ,  $a_2 = 9$ ,  $a_5 = 21$ .  
 (1) 求  $\{a_n\}$  的通项公式;  
 (2) 令  $b_n = 2^{a_n}$ , 求数列  $\{b_n\}$  的前  $n$  项和  $S_n$ .

18. 已知锐角三角形  $ABC$  中,  $\sin(A+B) = \frac{3}{5}$ ,  $\sin(A-B) = \frac{1}{5}$ .  
 (1) 求证:  $\tan A = 2 \tan B$ ;  
 (2) 设  $AB = 3$ , 求  $AB$  边上的高.

19. 已知 8 支球队中有 3 支弱队, 以抽签方式将这 8 支球队分为  $A$ 、 $B$  两组, 每组 4 支. 求:  
 (1)  $A$ 、 $B$  两组中有一组恰有两支弱队的概率;  
 (2)  $A$  组中至少有两支弱队的概率.

20. 如图, 直三棱柱  $ABC - A_1B_1C_1$  中,  $\angle ACB = 90^\circ$ ,  $AC = 1$ ,  $CB = \sqrt{2}$ , 侧棱  $AA_1 = 1$ , 侧面  $AA_1B_1B$  的两条对角线交点为  $D$ ,  $B_1C_1$  的中点为  $M$ .
- (1) 求证:  $CD \perp$  平面  $BDM$ ;
- (2) 求面  $B_1BD$  与面  $CBD$  所成二面角的大小.



21. 若函数  $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}ax^2 + (a-1)x + 1$  在区间  $(1, 4)$  内为减函数, 在区间  $(6, +\infty)$  上为增函数, 试求实数  $a$  的取值范围.

22. 给定抛物线  $C: y^2 = 4x$ ,  $F$  是  $C$  的焦点, 过点  $F$  的直线  $l$  与  $C$  相交于  $A$ ,  $B$  两点.
- (1) 设  $l$  的斜率为 1, 求  $\vec{OA}$  与  $\vec{OB}$  夹角的大小;
- (2) 设  $\vec{FB} = \lambda\vec{AF}$ , 若  $\lambda \in [4, 9]$ , 求  $l$  在  $y$  轴上截距的变化范围.