

2004 普通高等学校招生考试 (全国卷 II 理)

一、选择题

1. 已知集合 $M = \{x | x^2 < 4\}$, $N = \{x | x^2 - 2x - 3 < 0\}$, 则集合 $M \cap N =$ ()
- (A) $\{x | x < -2\}$ (B) $\{x | x > 3\}$
 (C) $\{x | -1 < x < 2\}$ (D) $\{x | 2 < x < 3\}$
2. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + x - 2}{x^2 + 4x - 5} =$ ()
- (A) $\frac{1}{2}$ (B) 1 (C) $\frac{2}{5}$ (D) $\frac{1}{4}$
3. 设复数 $\omega = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$, 则 $1 + \omega =$ ()
- (A) $-\omega$ (B) ω^2 (C) $-\frac{1}{\omega}$ (D) $\frac{1}{\omega^2}$
4. 已知圆 C 与圆 $(x-1)^2 + y^2 = 1$ 关于直线 $y = -x$ 对称, 则圆 C 的方程为 ()
- (A) $(x+1)^2 + y^2 = 1$ (B) $x^2 + y^2 = 1$
 (C) $x^2 + (y+1)^2 = 1$ (D) $x^2 + (y-1)^2 = 1$
5. 已知函数 $y = \tan(2x + \varphi)$ 的图象过点 $(\frac{\pi}{12}, 0)$, 则 φ 可以是 ()
- (A) $-\frac{\pi}{6}$ (B) $\frac{\pi}{6}$ (C) $-\frac{\pi}{12}$ (D) $\frac{\pi}{12}$
6. 函数 $y = -e^x$ 的图象 ()
- (A) 与 $y = e^x$ 的图象关于 y 轴对称
 (B) 与 $y = e^x$ 的图象关于坐标原点对称
 (C) 与 $y = e^{-x}$ 的图象关于 y 轴对称
 (D) 与 $y = e^{-x}$ 的图象关于坐标原点对称
7. 已知球 O 的半径为 1, A, B, C 三点都在球面上, 且每两点间的球面距离为 $\frac{\pi}{2}$, 则球心 O 到平面 ABC 的距离为 ()
- (A) $\frac{1}{3}$ (B) $\frac{\sqrt{3}}{3}$ (C) $\frac{2}{3}$ (D) $\frac{\sqrt{6}}{3}$
8. 在坐标平面内, 与点 $A(1, 2)$ 距离为 1, 且与点 $B(3, 1)$ 距离为 2 的直线共有 ()
- (A) 1 条 (B) 2 条 (C) 3 条 (D) 4 条
9. 已知平面上直线 L 的方向向量 $e = (-\frac{4}{5}, \frac{3}{5})$, 点 $O(0, 0)$ 和 $A(1, -2)$ 在 L 上的射影分别是 O_1 和 A_1 , 则 $\overrightarrow{O_1A_1} = \lambda e$, 其中 $\lambda =$ ()
- (A) $\frac{11}{5}$ (B) $-\frac{11}{5}$ (C) 2 (D) -2

10. 函数 $y = x \cos x - \sin x$ 在下面哪个区间内是增函数 ()
- (A) $(\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2})$ (B) $(\pi, 2\pi)$ (C) $(\frac{3\pi}{2}, \frac{5\pi}{2})$ (D) $(2\pi, 3\pi)$
11. 函数 $y = \sin^4 x + \cos^2 x$ 的最小正周期为 ()
- (A) $\frac{\pi}{4}$ (B) $\frac{\pi}{2}$ (C) π (D) 2π
12. 在由数字 1, 2, 3, 4, 5 组成的所有没有重复数字的 5 位数中, 大于 23145 且小于 43521 的数共有 ()
- (A) 56 个 (B) 57 个 (C) 58 个 (D) 60 个

二、填空题

13. 从装有 3 个红球, 2 个白球的袋中随机取出 2 个球, 设其中有 ξ 个红球, 则随机变量 ξ 的概率分布为:

ξ	0	1	2
P			

14. 设 x, y 满足约束条件 $\begin{cases} x \geq 0, \\ x \geq y, \\ 2x - y \leq 1, \end{cases}$ 则 $z = 3x + 2y$ 的最大值是_____.
15. 设中心在原点的椭圆与双曲线 $2x^2 - 2y^2 = 1$ 有公共的焦点, 且它们的离心率互为倒数, 则该椭圆的方程是_____.
16. 下面是关于四棱柱的四个命题:
- ① 若有两个侧面垂直于底面, 则该四棱柱为直四棱柱;
 ② 若两个过相对侧棱的截面都垂直于底面, 则该四棱柱为直四棱柱;
 ③ 若四个侧面两两全等, 则该四棱柱为直四棱柱;
 ④ 若四棱柱的四条对角线两两相等, 则该四棱柱为直四棱柱.
- 其中, 真命题的编号是_____. (写出所有真命题的编号)

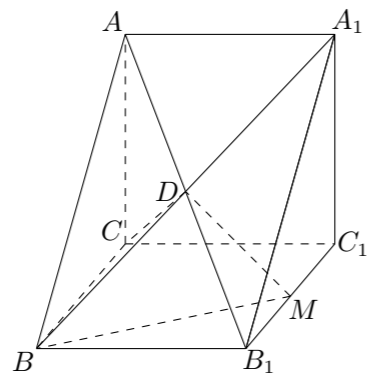
三、解答题

17. 已知锐角三角形 ABC 中, $\sin(A+B) = \frac{3}{5}$, $\sin(A-B) = \frac{1}{5}$.
- (1) 求证: $\tan A = 2 \tan B$;
 (2) 设 $AB = 3$, 求 AB 边上的高.

18. 已知 8 支球队中有 3 支弱队, 以抽签方式将这 8 支球队分为 A, B 两组, 每组 4 支. 求:
- (1) A, B 两组中有一组恰有两支弱队的概率;
 (2) A 组中至少有两支弱队的概率.

19. 数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和记为 S_n , 已知 $a_1 = 1$, $a_{n+1} = \frac{n+2}{n} S_n$ ($n = 1, 2, 3, \dots$). 证明:
- (1) 数列 $\{\frac{S_n}{n}\}$ 是等比数列;
 (2) $S_{n+1} = 4a_n$.

20. 如图, 直三棱柱 $ABC - A_1B_1C_1$ 中, $\angle ACB = 90^\circ$, $AC = 1$, $CB = \sqrt{2}$, 侧棱 $AA_1 = 1$, 侧面 AA_1B_1B 的两条对角线交点为 D , B_1C_1 的中点为 M .
- (1) 求证: $CD \perp$ 平面 BDM ;
- (2) 求面 B_1BD 与面 CBD 所成二面角的大小.



21. 给定抛物线 $C: y^2 = 4x$, F 是 C 的焦点, 过点 F 的直线 l 与 C 相交于 A 、 B 两点.
- (1) 设 l 的斜率为 1, 求 \vec{OA} 与 \vec{OB} 夹角的大小;
- (2) 设 $\vec{FB} = \lambda \vec{AF}$, 若 $\lambda \in [4, 9]$, 求 l 在 y 轴上截距的变化范围.
22. 已知函数 $f(x) = \ln(1+x) - x$, $g(x) = x \ln x$.
- (1) 求函数 $f(x)$ 的最大值;
- (2) 设 $0 < a < b$, 证明: $0 < g(a) + g(b) - 2g\left(\frac{a+b}{2}\right) < (b-a) \ln 2$.