2004 普通高等学校招生考试 (全国卷 IV 文)

一、选择题

1. 设集合 $U=\{0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5\}$, 集合 $M=\{0,\ 3,\ 5\}$, $N=\{1,\ 4,\ 5\}$, 则 $M\cap(\complement_U N)=$ ( )

(A) $\{5\}$ (B) $\{0,\ 3\}$ (C) $\{0,\ 2,\ 3,\ 5\}$ (D) $\{0,\ 1,\ 3,\ 4,\ 5\}$

2. 函数 $y=\mathrm{e}^{2x}$ $(x\in\mathbf{R})$ 的反函数为 ( )

(A) $y=2\ln x$ $(x>0)$ (B) $y=\ln(2x)$ $(x>0)$

(C) $y=\dfrac{1}{2}\ln x$ $(x>0)$ (D) $y=\dfrac{1}{2}\ln 2x$ $(x>0)$

3. 正三棱柱侧面的一条对角线长为 2, 且与底面成 45° 角, 则此三棱柱的体积为 ( )

(A) $\dfrac{\sqrt{6}}{2}$ (B) $\sqrt{6}$ (C) $\dfrac{\sqrt{6}}{6}$ (D) $\dfrac{\sqrt{6}}{3}$

4. 函数 $y=(x+1)^2(x-1)$ 在 $x=1$ 处的导数等于 ( )

(A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 4

5. 为了得到函数 $y=3\times\left(\dfrac{1}{3}\right)^x$ 的图象, 可以把函数 $y=\left(\dfrac{1}{3}\right)^x$ 的图象 ( )

(A) 向左平移 3 个单位长度 (B) 向右平移 3 个单位长度

(C) 向左平移 1 个单位长度 (D) 向右平移 1 个单位长度

6. 等差数列 $\{a_n\}$ 中, $a_1+a_2+a_3=-24$, $a_{18}+a_{19}+a_{20}=78$, 则此数列前 20 项和等于 ( )

(A) 160 (B) 180 (C) 200 (D) 220

7. 已知函数 $y=\log_{\frac{1}{4}}x$ 与 $y=kx$ 的图象有公共点 A, 且点 A 的横坐标为 2, 则 $k=$ ( )

(A) $-\dfrac{1}{4}$ (B) $\dfrac{1}{4}$ (C) $-\dfrac{1}{2}$ (D) $\dfrac{1}{2}$

8. 已知圆 C 的半径为 2, 圆心在 x 轴的正半轴上, 直线 $3x+4y+4=0$ 与圆 C 相切, 则圆 C 的方程为 ( )

(A) $x^2+y^2-2x-3=0$ (B) $x^2+y^2+4x=0$

(C) $x^2+y^2+2x-3=0$ (D) $x^2+y^2-4x=0$

9. 从 5 位男教师和 4 位女教师中选出 3 位教师, 派到 3 个班担任班主任 (每班 1 位班主任), 要求这 3 位班主任中男、女教师都要有, 则不同的选派方案共有 ( )

(A) 210 种 (B) 420 种 (C) 630 种 (D) 840 种

10. 函数 $y=2\sin\left(\dfrac{\pi}{3}-x\right)-\cos\left(\dfrac{\pi}{6}+x\right)$ $(x\in\mathbf{R})$ 的最小值等于 ( )

(A) -3 (B) -2 (C) -1 (D) $-\sqrt{5}$

11. 已知球的表面积为 20π, 球面上有 A、B、C 三点. 如果 $AB=AC=2$, $BC=2\sqrt{3}$, 则球心到平面 ABC 的距离为 ( )

(A) 1 (B) $\sqrt{2}$ (C) $\sqrt{3}$ (D) 2

12. $\triangle ABC$ 中, a、b、c 分别为 $\angle A$、$\angle B$、$\angle C$ 的对边. 如果 a、b、c 成等差数列, $\angle B=30^\circ$, $\triangle ABC$ 的面积为 $\dfrac{3}{2}$, 那么 $b=$ ( )

(A) $\dfrac{1+\sqrt{3}}{2}$ (B) $1+\sqrt{3}$ (C) $\dfrac{2+\sqrt{3}}{2}$ (D) $2+\sqrt{3}$

二、填空题

13. $\left(x-\dfrac{1}{\sqrt{x}}\right)^8$ 展开式中 x^5 的系数为______.

14. 已知函数 $y=\dfrac{1}{2}\sin\dfrac{x+\pi}{A}$ $(A>0)$ 的最小正周期为 3π, 则 $A=$______.

15. 向量 $\vec{a}$、$\vec{b}$ 满足 $\left(\vec{a}-\vec{b}\right)\cdot\left(2\vec{a}+\vec{b}\right)=-4$, 且 $|\vec{a}|=2$, $\left|\vec{b}\right|=4$, 则 $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 夹角的余弦值等于______.

16. 设 x, y 满足约束条件: $\begin{cases}x+y\leqslant 1,\\ y\leqslant x,\\ y\geqslant 0,\end{cases}$ 则 $z=2x+y$ 的最大值是______.

三、解答题

17. 已知 α 为第二象限角, 且 $\sin\alpha=\dfrac{\sqrt{15}}{4}$, 求 $\dfrac{\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{4}\right)}{\sin 2\alpha+\cos 2\alpha+1}$ 的值.

18. 已知数列 $\{a_n\}$ 为等比数列, $a_2=6$, $a_5=162$.

(1) 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式;

(2) 设 S_n 是数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和, 证明 $\dfrac{S_n\cdot S_{n+2}}{S_{n+1}^2}\leqslant 1$.

19. 已知直线 l_1 为曲线 $y=x^2+x-2$ 在点 $(1,0)$ 处的切线, l_2 为该曲线的另一条切线, 且 $l_1\perp l_2$.

(1) 求直线 l_2 的方程;

(2) 求由直线 l_1、l_2 和 x 轴所围成的三角形的面积.

20. 某同学参加科普知识竞赛, 需回答 3 个问题. 竞赛规则规定: 答对第一、二、三问题分别得 100 分、100 分、200 分, 答错得零分. 假设这名同学答对第一、二、三个问题的概率分别为 0.8、0.7、0.6, 且各题答对与否相互之间没有影响.

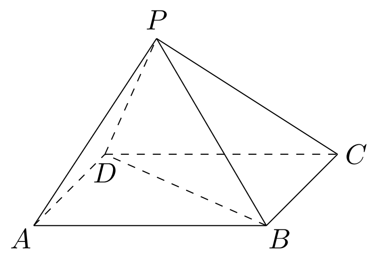
(1) 求这名同学得 300 分的概率;

(2) 求这名同学至少得 300 分的概率.

21. 如图, 四棱锥 $P-ABCD$ 中, 底面 $ABCD$ 为矩形, $AB=8$, $AD=4\sqrt{3}$, 侧面 PAD 为等边三角形, 并且与底面所成二面角为 $60°$.

(1) 求四棱锥 $P-ABCD$ 的体积;

(2) 证明: $PA \perp BD$.



22. 双曲线 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ $(a>1,\ b>0)$ 的焦点距为 $2c$, 直线 l 过点 $(a,0)$ 和 $(0,b)$, 且点 $(1,0)$ 到直线 l 的距离与点 $(-1,0)$ 到直线 l 的距离之和 $s \geqslant \frac{4}{5}c$. 求双曲线的离心率 e 的取值范围.