2004 普通高等学校招生考试 (全国卷 IV 理)

一、选择题

1. 已知集合 $M=\{0,\ 1,\ 2\}$, $N=\{x\mid x=2a,\ a\in M\}$, 则集合 $M\cap N$=(　)

(A) $\{0\}$　(B) $\{0,\ 1\}$　(C) $\{1,\ 2\}$　(D) $\{0,2\}$

2. 函数 $y=\mathrm{e}^{2x}$ $(x\in\mathbf{R})$ 的反函数为　(　)

(A) $y=2\ln x\ (x>0)$　(B) $y=\ln(2x)\ (x>0)$

(C) $y=\dfrac{1}{2}\ln x\ (x>0)$　(D) $y=\dfrac{1}{2}\ln 2x\ (x>0)$

3. 过点 $(-1,3)$ 且垂直于直线 $x-2y+3=0$ 的直线方程为　(　)

(A) $2x+y-1=0$　(B) $2x+y-5=0$

(C) $x+2y-5=0$　(D) $x-2y+7=0$

4. $\left(\dfrac{1-\sqrt{3}\mathrm{i}}{1+\mathrm{i}}\right)^2=$　(　)

(A) $\sqrt{3}+\mathrm{i}$　(B) $-\sqrt{3}-\mathrm{i}$　(C) $\sqrt{3}-\mathrm{i}$　(D) $-\sqrt{3}+\mathrm{i}$

5. 不等式 $\dfrac{x(x+2)}{x-3}<0$ 的解集为　(　)

(A) $\{x\mid x<-2$ 或 $0<x<3\}$　(B) $\{x\mid -2<x<2$ 或 $x>3\}$

(C) $\{x\mid x<-2$ 或 $x>0\}$　(D) $\{x\mid x<0$ 或 $x<3\}$

6. 等差数列 $\{a_n\}$ 中, $a_1+a_2+a_3=-24$, $a_{18}+a_{19}+a_{20}=78$, 则此数列前 20 项和等于　(　)

(A) 160　(B) 180　(C) 200　(D) 220

7. 对于直线 m、n 和平面 α, 下面命题中的真命题是　(　)

(A) 如果 $m\subset\alpha$, $n\not\subset\alpha$, m、n 是异面直线, 那么 $n\parallel\alpha$

(B) 如果 $m\subset\alpha$, $n\not\subset\alpha$, m、n 是异面直线, 那么 n 与 α 相交

(C) 如果 $m\subset\alpha$, $n\parallel\alpha$, m、n 共面, 那么 $m\parallel n$

(D) 如果 $m\parallel\alpha$, $n\parallel\alpha$, m、n 共面, 那么 $m\parallel n$

8. 已知椭圆的中心在原点, 离心率 $e=\dfrac{1}{2}$, 且它的一个焦点与抛物线 $y^2=-4x$ 的焦点重合, 则此椭圆方程为　(　)

(A) $\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{3}=1$　(B) $\dfrac{x^2}{8}+\dfrac{y^2}{6}=1$

(C) $\dfrac{x^2}{2}+y^2=1$　(D) $\dfrac{x^2}{4}+y^2=1$

9. 从 5 位男教师和 4 位女教师中选出 3 位教师, 派到 3 个班担任班主任 (每班 1 位班主任), 要求这 3 位班主任中男、女教师都要有, 则不同的选派方案共有　(　)

(A) 210 种　(B) 420 种　(C) 630 种　(D) 840 种

10. 已知球的表面积为 20π, 球面上有 A、B、C 三点. 如果 $AB=AC=2$, $BC=2\sqrt{3}$, 则球心到平面 ABC 的距离为　(　)

(A) 1　(B) $\sqrt{2}$　(C) $\sqrt{3}$　(D) 2

11. $\triangle ABC$ 中, a、b、c 分别为 $\angle A$、$\angle B$、$\angle C$ 的对边. 如果 a、b、c 成等差数列, $\angle B=30^\circ$, $\triangle ABC$ 的面积为 $\dfrac{3}{2}$, 那么 $b=$　(　)

(A) $\dfrac{1+\sqrt{3}}{2}$　(B) $1+\sqrt{3}$　(C) $\dfrac{2+\sqrt{3}}{2}$　(D) $2+\sqrt{3}$

12. 设函数 $f(x)$ $(x\in\mathbf{R})$ 为奇函数, $f(1)=\dfrac{1}{2}$, $f(x+2)=f(x)+f(2)$, 则 $f(5)=$　(　)

(A) 0　(B) 1　(C) $\dfrac{5}{2}$　(D) 5

二、填空题

13. $\left(x-\dfrac{1}{\sqrt{x}}\right)^8$ 展开式中 x^5 的系数为______.

14. 向量 $\vec{a}$、$\vec{b}$ 满足 $\left(\vec{a}-\vec{b}\right)\cdot\left(2\vec{a}+\vec{b}\right)=-4$, 且 $|\vec{a}|=2$, $\left|\vec{b}\right|=4$, 则 $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 夹角的余弦值等于______.

15. 函数 $f(x)=\cos x-\dfrac{1}{2}\cos 2x$ $(x\in\mathbf{R})$ 的最大值等于______.

16. 设 x, y 满足约束条件: $\begin{cases}x+y\leqslant 1,\\ y\leqslant x,\\ y\geqslant 0,\end{cases}$ 则 $z=2x+y$ 的最大值是______.

三、解答题

17. 已知 α 为第二象限角, 且 $\sin\alpha=\dfrac{\sqrt{15}}{4}$, 求 $\dfrac{\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{4}\right)}{\sin 2\alpha+\cos 2\alpha+1}$ 的值.

18. 求函数 $f(x)=\ln(1+x)-\dfrac{1}{4}x^2$ 在 $[0,2]$ 上的最大值和最小值.

19. 某同学参加科普知识竞赛, 需回答三个问题. 竞赛规则规定: 每题回答正确得 100 分, 回答不正确得 -100 . 假设这名同学每题回答正确的概率均为 0.8, 且各题回答正确与否相互之间没有影响.

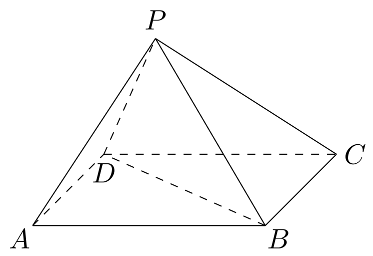
(1) 求这名同学回答这三个问题的总得分 ξ 的概率分布和数学期望;

(2) 求这名同学总得分不为负分 (即 $\xi\geqslant 0$) 的概率.

20. 如图, 四棱锥 $P-ABCD$ 中, 底面 $ABCD$ 为矩形, $AB=8$, $AD=4\sqrt{3}$, 侧面 PAD 为等边三角形, 并且与底面所成二面角为 60°.

(1) 求四棱锥 $P-ABCD$ 的体积;

(2) 证明: $PA \perp BD$.



21. 双曲线 $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$ $(a>1,\ b>0)$ 的焦点距为 $2c$, 直线 l 过点 $(a,0)$ 和 $(0,b)$, 且点 $(1,0)$ 到直线 l 的距离与点 $(-1,0)$ 到直线 l 的距离之和 $s \geqslant \dfrac{4}{5}c$. 求双曲线的离心率 e 的取值范围.

22. 已知函数 $f(x)=\mathrm{e}^{-x}(\cos x+\sin x)$, 将满足 $f'(x)=0$ 的所有正数 x 从小到大排成数列 $\{x_n\}$.

(1) 证明数列 $\{f(x_n)\}$ 为等比数列;

(2) 记 S_n 是数列 $\{x_n f(x_n)\}$ 的前 n 项和, 求 $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{S_1+S_2+\cdots+S_n}{n}$.