

2004 普通高等学校招生考试 (天津卷理)

一、选择题

1. i 是虚数单位, $\frac{(-1+i)(2+i)}{i^3} =$ ()

- (A) $1+i$ (B) $-1-i$ (C) $1+3i$ (D) $-1-3i$

2. 不等式 $\frac{x-1}{x} \geq 2$ 的解集为 ()

- (A) $[-1, 0)$ (B) $[-1, +\infty)$
(C) $(-\infty, -1]$ (D) $(-\infty, -1] \cup (0, +\infty)$

3. 若平面向量 \vec{b} 与向量 $\vec{a} = (1, -2)$ 的夹角是 180° , 且 $|\vec{b}| = 3\sqrt{5}$, 则 $\vec{b} =$ ()

- (A) $(-3, 6)$ (B) $(3, -6)$ (C) $(6, -3)$ (D) $(-6, 3)$

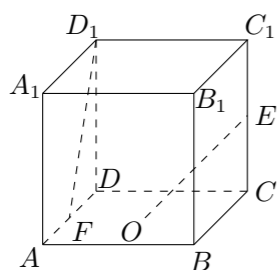
4. 设 P 是双曲线 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{9} = 1$ 上一点, 双曲线的一条渐近线方程为 $3x - 2y = 0$, F_1, F_2 分别是双曲线的左、右焦点, 若 $|PF_1| = 3$, 则 $|PF_2| =$ ()

- (A) 1 或 5 (B) 6 (C) 7 (D) 9

5. 若函数 $f(x) = \log_a x$ ($0 < a < 1$) 在区间 $[a, 2a]$ 上的最大值是最小值的 3 倍, 则 $a =$ ()

- (A) $\frac{\sqrt{2}}{4}$ (B) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ (C) $\frac{1}{4}$ (D) $\frac{1}{2}$

6. 如图, 在棱长为 2 的正方体 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 中, O 是底面 $ABCD$ 的中心, E, F 分别是 CC_1, AD 的中点, 那么异面直线 OE 和 FD_1 所成的角的余弦值等于 ()



- (A) $\frac{\sqrt{10}}{5}$ (B) $\frac{\sqrt{15}}{5}$ (C) $\frac{4}{5}$ (D) $\frac{2}{3}$

7. 若 $P(2, -1)$ 为圆 $(x-1)^2 + y^2 = 25$ 的弦 AB 的中点, 则直线 AB 的方程是 ()

- (A) $x - y - 3 = 0$ (B) $2x + y - 3 = 0$
(C) $x + y - 1 = 0$ (D) $2x - y - 5 = 0$

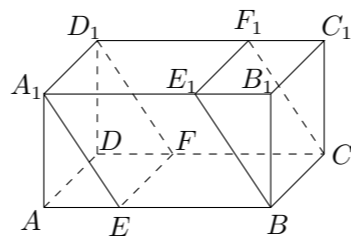
8. 已知数列 $\{a_n\}$, 那么“对任意的 $n \in \mathbf{N}^*$, 点 $P_n(n, a_n)$ 都在直线 $y = 2x + 1$ 上”是“ $\{a_n\}$ 为等差数列”的 ()

- (A) 必要而不充分条件 (B) 充分而不必要条件
(C) 充要条件 (D) 既不充分也不必要条件

9. 函数 $y = 2 \sin\left(\frac{\pi}{6} - 2x\right)$ ($x \in [0, \pi]$) 为增函数的区间是 ()

- (A) $\left[0, \frac{\pi}{3}\right]$ (B) $\left[\frac{\pi}{12}, \frac{7\pi}{12}\right]$ (C) $\left[\frac{\pi}{3}, \frac{5\pi}{6}\right]$ (D) $\left[\frac{5\pi}{6}, \pi\right]$

10. 如图, 在长方体 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 中, $AB = 6, AD = 4, AA_1 = 3$. 分别过 BC, A_1D_1 的两个平行截面将长方体分成三部分, 其体积分别记为 $V_1 = V_{AEA_1-DFD_1}, V_2 = V_{EBE_1A_1-FCF_1D_1}, V_3 = V_{B_1E_1B-C_1F_1C}$. 若 $V_1 : V_2 : V_3 = 1 : 4 : 1$, 则截面 A_1EFD_1 的面积为 ()



- (A) $4\sqrt{10}$ (B) $8\sqrt{3}$ (C) $4\sqrt{13}$ (D) 16

11. 函数 $y = 3^{x^2-1}$ ($-1 \leq x < 0$) 的反函数是 ()

- (A) $y = \sqrt{1 + \log_3 x}$ ($x \geq \frac{1}{3}$) (B) $y = -\sqrt{1 + \log_3 x}$ ($x \geq \frac{1}{3}$)
(C) $y = \sqrt{1 + \log_3 x}$ ($\frac{1}{3} < x \leq 1$) (D) $y = -\sqrt{1 + \log_3 x}$ ($\frac{1}{3} < x \leq 1$)

12. 定义在 \mathbf{R} 上的函数 $f(x)$ 既是偶函数又是周期函数, 若 $f(x)$ 的最小正周期是 π , 且当 $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ 时, $f(x) = \sin x$, 则 $f\left(\frac{5\pi}{3}\right)$ 的值为 ()

- (A) $-\frac{1}{2}$ (B) $\frac{1}{2}$ (C) $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ (D) $\frac{\sqrt{3}}{2}$

二、填空题

13. 某工厂生产 A, B, C 三种不同型号的产品, 产品数量之比依次为 $2 : 3 : 5$, 现用分层抽样方法抽出一个容量为 n 的样本, 样本中 A 种型号产品有 16 件. 那么此样本的容量 $n =$ _____.

14. 如果过两点 $A(a, 0)$ 和 $B(0, a)$ 的直线与抛物线 $y = x^2 - 2x - 3$ 没有交点, 那么实数 a 的取值范围是 _____.

15. 若 $(1-2x)^{2004} = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_{2004}x^{2004}$ ($x \in \mathbf{R}$), 则 $(a_0 + a_1) + (a_0 + a_2) + (a_0 + a_3) + \dots + (a_0 + a_{2004}) =$ _____ (用数字作答)

16. 从 1, 3, 5, 7 中任取 2 个数字, 从 0, 2, 4, 6, 8 中任取 2 个数字, 组成没有重复数字的四位数, 其中能被 5 整除的四位数共有 _____ 个. (用数字作答)

三、解答题

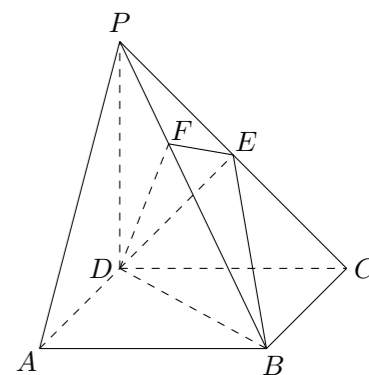
17. 已知 $\tan\left(\frac{\pi}{4} + \alpha\right) = \frac{1}{2}$.
(1) 求 $\tan \alpha$ 的值;
(2) 求 $\frac{\sin 2\alpha - \cos^2 \alpha}{1 + \cos 2\alpha}$ 的值.

18. 从 4 名男生和 2 名女生中任选 3 人参加演讲比赛, 设随机变量 ξ 表示所选 3 人中女生的人数.

- (1) 求 ξ 的分布列;
(2) 求 ξ 的数学期望;
(3) 求“所选 3 人中女生人数 $\xi \leq 1$ ”的概率.

19. 如图, 在四棱锥 $P - ABCD$ 中, 底面 $ABCD$ 是正方形, 侧棱 $PD \perp$ 底面 $ABCD, PD = DC, E$ 是 PC 的中点, 作 $EF \perp PB$ 交 PB 于点 F .

- (1) 证明: $PA \parallel$ 平面 EDB ;
(2) 证明: $PB \perp$ 平面 EFD ;
(3) 求二面角 $C - PB - D$ 的大小.



20. 已知函数 $f(x) = ax^3 + bx^2 - 3x$ 在 $x = \pm 1$ 处取得极值.
- (1) 讨论 $f(1)$ 和 $f(-1)$ 是函数 $f(x)$ 的极大值还是极小值;
 - (2) 过点 $A(0, 16)$ 作曲线 $y = f(x)$ 的切线, 求此切线方程.
21. 已知定义在 \mathbf{R} 上的函数 $f(x)$ 和数列 $\{a_n\}$ 满足下列条件: $a_1 = a$, $a_n = f(a_{n-1})$ ($n = 2, 3, 4, \dots$), $a_2 \neq a_1$, $f(a_n) - f(a_{n-1}) = k(a_n - a_{n-1})$ ($n = 2, 3, 4, \dots$), 其中 a 为常数, k 为非零常数.
- (1) 令 $b_n = a_{n+1} - a_n$ ($n \in \mathbf{N}^*$), 证明数列 $\{b_n\}$ 是等比数列;
 - (2) 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式;
 - (3) 当 $|k| < 1$ 时, 求 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$.
22. 椭圆的中心是原点 O , 它的短轴长为 $2\sqrt{2}$, 相应于焦点 $F(c, 0)$ ($c > 0$) 的准线 l 与 x 轴相交于点 A , $|OF| = 2|FA|$, 过点 A 的直线与椭圆相交于 P 、 Q 两点.
- (1) 求椭圆的方程及离心率;
 - (2) 若 $\overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{OQ} = 0$, 求直线 PQ 的方程;
 - (3) 设 $\overrightarrow{AP} = \lambda \overrightarrow{AQ}$ ($\lambda > 1$), 过点 P 且平行于准线 l 的直线与椭圆相交于另一点 M , 证明 $\overrightarrow{FM} = -\lambda \overrightarrow{FQ}$.