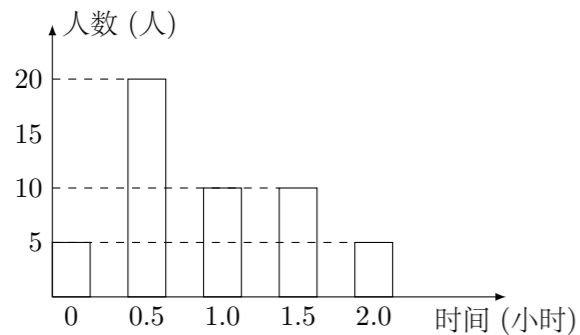


2004 普通高等学校招生考试 (江苏卷)

一、选择题

1. 设集合 $P = \{1, 2, 3, 4\}$, $Q = \{x \mid |x| \leq 2, x \in \mathbf{R}\}$, 则 $P \cap Q$ 等于 ()
 (A) $\{1, 2\}$ (B) $\{3, 4\}$
 (C) $\{1\}$ (D) $\{-2, -1, 0, 1, 2\}$
2. 函数 $y = 2 \cos^2 x + 1$ ($x \in \mathbf{R}$) 的最小正周期为 ()
 (A) $\frac{\pi}{2}$ (B) π (C) 2π (D) 4π
3. 从 4 名男生和 3 名女生中选出 4 人参加某个座谈会, 若这 4 人中必须既有男生又有女生, 则不同的选法共有 ()
 (A) 140 种 (B) 120 种 (C) 35 种 (D) 34 种
4. 一平面截一球得到直径是 6 cm 的圆面, 球心到这个平面的距离是 4 cm, 则该球的体积是 ()
 (A) $\frac{100\pi}{3} \text{ cm}^3$ (B) $\frac{208\pi}{3} \text{ cm}^3$ (C) $\frac{500\pi}{3} \text{ cm}^3$ (D) $\frac{416\sqrt{3}\pi}{3} \text{ cm}^3$
5. 若双曲线 $\frac{x^2}{8} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ 的一条准线与抛物线 $y^2 = 8x$ 的准线重合, 则双曲线离心率为 ()
 (A) $\sqrt{2}$ (B) $2\sqrt{2}$ (C) 4 (D) $4\sqrt{2}$
6. 某校为了了解学生的课外阅读情况, 随机调查了 50 名学生, 得到他们在某一天各自课外阅读所用时间的数据, 结果用下面的条形图表示. 根据条形图可得这 50 名学生这一天平均每人的课外阅读时间为 ()



- (A) 0.6 小时 (B) 0.9 小时 (C) 1.0 小时 (D) 1.5 小时
7. $(2x + \sqrt{x})^4$ 的展开式中 x^3 的系数是 ()
 (A) 6 (B) 12 (C) 24 (D) 48
8. 若函数 $y = \log_a(x + b)$ ($a > 0, a \neq 1$) 的图象过两点 $(-1, 0)$ 和 $(0, 1)$, 则 ()
 (A) $a = 2, b = 2$ (B) $a = \sqrt{2}, b = 2$
 (C) $a = 2, b = 1$ (D) $a = \sqrt{2}, b = \sqrt{2}$

9. 将一颗质地均匀的骰子 (它是一种各面上分别标有点数 1, 2, 3, 4, 5, 6 的正方体玩具) 先后抛掷 3 次, 至少出现的概率是 ()
 (A) $\frac{5}{216}$ (B) $\frac{25}{216}$ (C) $\frac{31}{216}$ (D) $\frac{91}{216}$
10. 函数 $f(x) = x^3 - 3x + 1$ 在闭区间 $[-3, 0]$ 上的最大值、最小值分别是 ()
 (A) 1, -1 (B) 1, -17 (C) 3, -17 (D) 9, -19
11. 设 $k > 1, f(x) = k(x - 1)$ ($x \in \mathbf{R}$). 在平面直角坐标系 xOy 中, 函数 $y = f(x)$ 的图象与 x 轴交于 A 点, 它的反函数 $y = f^{-1}(x)$ 的图象与 y 轴交于 B 点, 并且这两个函数的图象交于 P 点. 已知四边形 $OAPB$ 的面积是 3, 则 k 等于 ()
 (A) 3 (B) $\frac{3}{2}$ (C) $\frac{4}{3}$ (D) $\frac{6}{5}$
12. 设函数 $f(x) = -\frac{x}{1+|x|}$ ($x \in \mathbf{R}$), 区间 $M = [a, b]$ ($a < b$), 集合 $N = \{y \mid y = f(x), x \in M\}$, 则使 $M = N$ 成立的实数对 (a, b) 有 ()
 (A) 0 个 (B) 1 个 (C) 2 个 (D) 无数多个

二、填空题

13. 二次函数 $y = ax^2 + bx + c$ ($x \in \mathbf{R}$) 的部分对应值如下表:

x	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
y	6	0	-4	-6	-6	-4	0	6

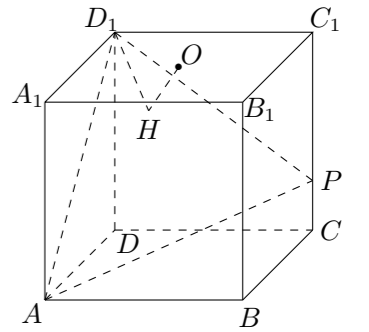
则不等式 $ax^2 + bx + c > 0$ 的解集是_____.

14. 以点 $(1, 2)$ 为圆心, 与直线 $4x + 3y - 35 = 0$ 相切的圆的方程是_____.
15. 设数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n , $S_n = \frac{a_1(3^n - 1)}{2}$ (对于所有 $n \geq 1$), 且 $a_4 = 54$, 则 a_1 的数值是_____.
16. 平面向量 \vec{a}, \vec{b} 中, 已知 $\vec{a} = (4, -3)$, $|\vec{b}| = 1$, 且 $\vec{a} \cdot \vec{b} = 5$, 则向量 $\vec{b} =$ _____.

三、解答题

17. 已知 $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$, $\tan \frac{\alpha}{2} + \cot \frac{\alpha}{2} = \frac{5}{2}$, 求 $\sin(\alpha - \frac{\pi}{3})$ 的值.

18. 在棱长为 4 的正方体 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 中, O 是正方形 $A_1B_1C_1D_1$ 的中心, 点 P 在棱 CC_1 上, 且 $CC_1 = 4CP$.
 (1) 求直线 AP 与平面 BCC_1B_1 所成的角的大小 (结果用反三角函数值表示);
 (2) 设 O 点在平面 D_1AP 上的射影是 H , 求证: $D_1H \perp AP$;
 (3) 求点 P 到平面 ABD_1 的距离.



19. 制定投资计划时, 不仅要考虑可能获得的盈利, 而且要考虑可能出现的亏损. 某投资人打算投资甲、乙两个项目. 根据预测, 甲、乙项目可能的最大盈利率分别为 100% 和 50%, 可能的最大亏损分别为 30% 和 10%. 投资人计划投资金额不超过 10 万元, 要求确保可能的资金亏损不超过 1.8 万元. 问投资人对甲、乙两个项目各投资多少万元, 才能使可能的盈利最大?

20. 设无穷等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n .

(1) 若首项 $a_1 = \frac{3}{2}$, 公差 $d = 1$, 求满足 $S_{k^2} = (S_k)^2$ 的正整数 k ;

(2) 求所有的无穷等差数列 $\{a_n\}$, 使得对于一切正整数 k 都有 $S_{k^2} = (S_k)^2$ 成立.

21. 已知椭圆的中心在原点, 离心率为 $\frac{1}{2}$, 一个焦点是 $F(-m, 0)$ (m 是大于 0 的常数).

(1) 求椭圆的方程;

(2) 设 Q 是椭圆上的一点, 且过点 F 、 Q 的直线 l 与 y 轴交于点 M . 若 $|\overrightarrow{MQ}| = 2|\overrightarrow{QF}|$, 求直线 l 的斜率.

22. 已知函数 $f(x)$ ($x \in \mathbf{R}$) 满足下列条件: 对任意的实数 x_1, x_2 都有 $\lambda(x_1 - x_2)^2 \leq (x_1 - x_2)[f(x_1) - f(x_2)]$ 和 $|f(x_1) - f(x_2)| \leq |x_1 - x_2|$, 其中 λ 是大于 0 的常数. 设实数 a_0, a, b 满足 $f(a_0) = 0$ 和 $b = a - \lambda f(a)$.

(1) 证明: $\lambda \leq 1$, 并且不存在 $b_0 \neq a_0$, 使得 $f(b_0) = 0$;

(2) 证明: $(b - a_0)^2 \leq (1 - \lambda^2)(a - a_0)^2$;

(3) 证明: $[f(b)]^2 \leq (1 - \lambda^2)[f(a)]^2$.