2004 普通高等学校招生考试 (湖北卷理)

一、选择题

1. 与直线 $2x-y+4=0$ 平行的抛物线 $y=x^2$ 的切线方程是 ( )

(A) $2x-y+3=0$ (B) $2x-y-3=0$

(C) $2x-y+1=0$ (D) $2x-y-1=0$

2. 复数 $\dfrac{(-1+\sqrt{3}\mathrm{i})^5}{1+\sqrt{3}\mathrm{i}}$ 的值是 ( )

(A) -16 (B) 16 (C) $-\dfrac{1}{4}$ (D) $\dfrac{1}{4}-\dfrac{\sqrt{3}}{4}\mathrm{i}$

3. 已知 $f\left(\dfrac{1-x}{1+x}\right)=\dfrac{1-x^2}{1+x^2}$, 则 $f(x)$ 的解析式可取为 ( )

(A) $\dfrac{x}{1+x^2}$ (B) $-\dfrac{2x}{1+x^2}$ (C) $\dfrac{2x}{1+x^2}$ (D) $-\dfrac{x}{1+x^2}$

4. 已知 $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ 为非零的平面向量. 甲: $\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{a}\cdot\vec{c}$, 乙: $\vec{b}=\vec{c}$, 则( )

(A) 甲是乙的充分条件但不是必要条件

(B) 甲是乙的必要条件但不是充分条件

(C) 甲是乙的充要条件

(D) 甲既不是乙的充分条件也不是乙的必要条件

5. 若 $\dfrac{1}{a}<\dfrac{1}{b}<0$, 则下列不等式① $a+b<ab$; ② $|a|>|b|$; ③ $a<b$; ④ $\dfrac{b}{a}+\dfrac{a}{b}>2$ 中, 正确的不等式有 ( )

(A) 1 个 (B) 2 个 (C) 3 个 (D) 4 个

6. 已知椭圆 $\dfrac{x^2}{16}+\dfrac{y^2}{9}=1$ 的左、右焦点分别为 F_1、F_2, 点 P 在椭圆上, 若 P、F_1、F_2 是一个直角三角形的三个顶点, 则点 P 到 x 轴的距离为 ( )

(A) $\dfrac{9}{5}$ (B) 3 (C) $\dfrac{9\sqrt{7}}{7}$ (D) $\dfrac{9}{4}$

7. 函数 $f(x)=a^x+\log_a(x+1)$ 在 $[0,1]$ 上的最大值与最小值之和为 a, 则 a 的值为 ( )

(A) $\dfrac{1}{4}$ (B) $\dfrac{1}{2}$ (C) 2 (D) 4

8. 设数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和 $S_n=a\left[2-\left(\dfrac{1}{2}\right)^{n-1}\right]-b\left[2-(n+1)\left(\dfrac{1}{2}\right)^{n-1}\right]$ $(n=1,\ 2,\ \cdots)$, 其中 a、b 是非零常数. 则存在数列 $\{x_n\}$、$\{y_n\}$ 使得( )

(A) $a_n=x_n+y_n$, 其中 $\{x_n\}$ 为等差数列, $\{y_n\}$ 为等比数列

(B) $a_n=x_n+y_n$, 其中 $\{x_n\}$ 和 $\{y_n\}$ 都为等差数列

(C) $a_n=x_n\cdot y_n$, 其中 $\{x_n\}$ 为等差数是列, $\{y_n\}$ 为等比数列

(D) $a_n=x_n\cdot y_n$, 其中 $\{x_n\}$ 和 $\{y_n\}$ 都为等比数列

9. 函数 $f(x)=ax^3+x+1$ 有极值的充要条件是 ( )

(A) $a>0$ (B) $a\geqslant 0$ (C) $a<0$ (D) $a\leqslant 0$

10. 设集合 $P=\{m\mid -1<m<0\}$, $Q=\{m\in\mathbf{R}\mid mx^2+4mx-4<0$ 对任意实数 x 恒成立$\}$, 则下列关系中成立的是 ( )

(A) $P\subsetneqq Q$ (B) $Q\subsetneqq P$ (C) $P=Q$ (D) $P\cap Q=\varnothing$

11. 已知平面 α 与 β 所成的二面角为 $80°$, P 为 α, β 外一定点, 过点 P 的一条直线与 α, β 所成的角都是 $30°$, 则这样的直线有且仅有 ( )

(A) 1 条 (B) 2 条 (C) 3 条 (D) 4 条

12. 设 $y=f(t)$ 是某港口水的深度 y (米) 关于时间 t (时) 的函数, 其中 $0\leqslant t\leqslant 24$, 下表是该港口某一天从 0 时至 24 时记录的时间 t 与水深 y 的关系:

t	0	3	6	9	12	15	18	21	24
y	12	15.1	12.1	9.1	11.9	14.9	11.9	8.9	12.1

经长期观察, 函数 $y=f(t)$ 的图象可以近似地看成函数 $y=k+A\sin(\omega t+\varphi)$ 的图象. 下面的函数中, 最能近似表示表中数据间对应关系的函数是 ( )

(A) $y=12+3\sin\dfrac{\pi}{6}t$, $t\in[0,24]$

(B) $y=12+3\sin\left(\dfrac{\pi}{6}t+\pi\right)$, $t\in[0,24]$

(C) $y=12+3\sin\dfrac{\pi}{12}t$, $t\in[0,24]$

(D) $y=12+3\sin\left(\dfrac{\pi}{12}t+\dfrac{\pi}{2}\right)$, $t\in[0,24]$

二、填空题

13. 设随机变量 ξ 的概率分布为 $P(\xi=k)=\dfrac{a}{5^k}$, a 为常数, $k=1,\ 2,\ \cdots$, 则 $a=$______.

14. 将标号为 1, 2, $\cdots$, 10 的 10 个球放入标号为 1, 2, $\cdots$, 10 的 10 个盒子内, 每个盒内放一个球, 则恰好有 3 个球的标号与其所在盒子的标号不一致的放入方法共有______种. (以数字作答)

15. 设 A、B 为两个集合. 下列四个命题:

① $A\not\subseteq B\Leftrightarrow$ 对任意 $x\in A$, 有 $x\notin B$;

② $A\not\subseteq B\Leftrightarrow A\cap B=\varnothing$;

③ $A\not\subseteq B\Leftrightarrow A\not\supseteq B$;

④ $A\not\subseteq B\Leftrightarrow$ 存在 $x\in A$, 使得 $x\notin B$.

其中真命题的序号是______. (把符合要求的命题序号都填上)

16. 某日中午 12 时整, 甲船自 A 处以 16 km/h 的速度向正东行驶, 乙船自 A 的正北 18 km 处以 24 km/h 的速度向正南行驶, 则当日 12 时 30 分时两船之距离对时间的变化率是______km/h.

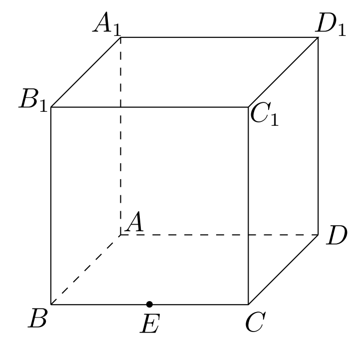
三、解答题

17. 已知 $6\sin^2\alpha+\sin\alpha\cos\alpha-2\cos^2\alpha=0$, $\alpha\in\left[\dfrac{\pi}{2},\pi\right]$, 求 $\sin\left(2\alpha+\dfrac{\pi}{3}\right)$ 的值.

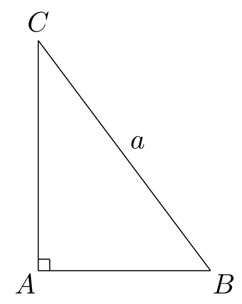
18. 如图, 在棱长为 1 的正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中, 点 E 是棱 BC 的中点, 点 F 是棱 CD 上的动点.

(1) 试确定点 F 的位置, 使得 $D_1E\perp$ 平面 AB_1F;

(2) 当 $D_1E\perp$ 平面 AB_1F 时, 求二面角 C_1-EF-A 的大小. (结果用反三角函数值表示)



19. 如图, 在 Rt$\triangle ABC$ 中, 已知 $BC=a$, 若长为 $2a$ 的线段 PQ 以点 A 为中点, 问 $\overrightarrow{PQ}$ 与 $\overrightarrow{BC}$ 的夹角 θ 取何值时 $\overrightarrow{BP}\cdot\overrightarrow{CQ}$ 的值最大? 并求出这个最大值.



20. 直线 $l: y=kx+1$ 与双曲线 $C: 2x^2-y^2=1$ 的右支交于不同的两点 A、B.

(1) 求实数 k 的取值范围;

(2) 是否存在实数 k, 使得以线段 AB 为直径的圆经过双曲线 C 的右焦点 F? 若存在, 求出 k 的值. 若不存在, 说明理由.

21. 某突发事件, 在不采取任何预防措施的情况下发生的概率为 0.3; 一旦发生, 将造成 400 万元的损失. 现有甲、乙两种相互独立的预防措施可供采用. 单独采用甲、乙预防措施所需的费用分别为 45 万元和 30 万元, 采用相应预防措施后此突发事件不发生的概率分别是 0.9 和 0.85. 若预防方案允许甲、乙两种预防措施单独采用、联合采用或不采用, 请确定预防方案使总费用最少.

注: 总费用 = 采取预防措施的费用 + 发生突发事件损失的期望值.

22. 已知 $a>0$, 数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1=a$, $a_{n+1}=a+\dfrac{1}{a_n}$, $n=1,2,\cdots$.

(1) 已知数列 $\{a_n\}$ 极限存在且大于零, 求 $A=\lim\limits_{n\to\infty}a_n$ (将 A 用 a 表示);

(2) 设 $b_n=a_n-A$, $n=1,2,\cdots$, 证明: $b_{n+1}=-\dfrac{b_n}{A(b_n+A)}$;

(3) 若 $|b_n|\leqslant\dfrac{1}{2^n}$ 对 $n=1,2,\cdots$ 都成立, 求 a 的取值范围.