

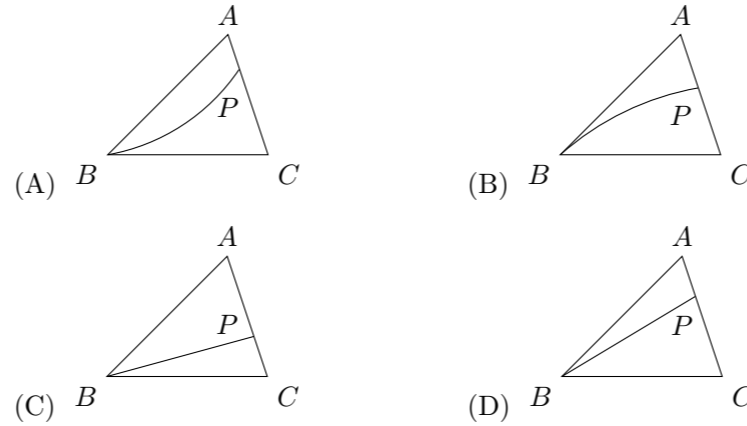
2004 普通高等学校招生考试 (重庆卷理)

一、选择题

1. 函数 $y = \sqrt{\log_{\frac{1}{2}}(3x-2)}$ 的定义域是 ()
 (A) $[1, +\infty)$ (B) $(\frac{2}{3}, +\infty)$ (C) $[\frac{2}{3}, 1]$ (D) $(\frac{2}{3}, 1]$
2. 设复数 $Z = 1 + \sqrt{2}i$, 则 $Z^2 - 2Z =$ ()
 (A) -3 (B) 3 (C) $-3i$ (D) $3i$
3. 圆 $x^2 + y^2 - 2x + 4y + 3 = 0$ 的圆心到直线 $x - y = 1$ 的距离为 ()
 (A) 2 (B) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ (C) 1 (D) $\sqrt{2}$
4. 不等式 $x + \frac{2}{x+1} > 2$ 的解集是 ()
 (A) $(-1, 0) \cup (1, +\infty)$ (B) $(-\infty, -1) \cup (0, 1)$
 (C) $(-1, 0) \cup (0, 1)$ (D) $(-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$
5. $\sin 163^\circ \sin 223^\circ + \sin 253^\circ \sin 313^\circ =$ ()
 (A) $-\frac{1}{2}$ (B) $\frac{1}{2}$ (C) $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ (D) $\frac{\sqrt{3}}{2}$
6. 若向量 \vec{a} 与 \vec{b} 的夹角为 60° , $|\vec{b}| = 4$, $(\vec{a} + 2\vec{b}) \cdot (\vec{a} - 3\vec{b}) = -72$, 则向量 \vec{a} 的模为 ()
 (A) 2 (B) 4 (C) 6 (D) 12
7. 一元二次方程 $ax^2 + 2x + 1 = 0$ ($a \neq 0$) 有一个正根和一个负根的充分不必要条件是 ()
 (A) $a < 0$ (B) $a > 0$ (C) $a < -1$ (D) $a > 1$
8. 设 P 是 60° 的二面角 $\alpha - l - \beta$ 内一点, $PA \perp$ 平面 α , $PB \perp$ 平面 β , A, B 为垂足, $PA = 4$, $PB = 2$, 则 AB 的长为 ()
 (A) $2\sqrt{3}$ (B) $2\sqrt{5}$ (C) $2\sqrt{7}$ (D) $4\sqrt{2}$
9. 若数列 $\{a_n\}$ 是等差数列, 首项 $a_1 > 0$, $a_{2003} + a_{2004} > 0$, $a_{2003} \cdot a_{2004} < 0$, 则使前 n 项和 $S_n > 0$ 成立的最大自然数 n 是 ()
 (A) 4005 (B) 4006 (C) 4007 (D) 4008
10. 已知双曲线 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($a > 0, b > 0$) 的左、右焦点分别为 F_1, F_2 , 点 P 在双曲线的右支上, 且 $|PF_1| = 4|PF_2|$, 则此双曲线的离心率 e 的最大值为 ()
 (A) $\frac{4}{3}$ (B) $\frac{5}{3}$ (C) 2 (D) $\frac{7}{3}$
11. 某校高三年级举行一次演讲赛共有 10 位同学参赛, 其中一班有 3 位, 二班有 2 位, 其它班有 5 位, 若采用抽签的方式确定他们的演讲顺序, 则一班有 3 位同学恰好被排在一起 (指演讲序号相连), 而二班的 2 位同学没有被排在一起的概率为 ()

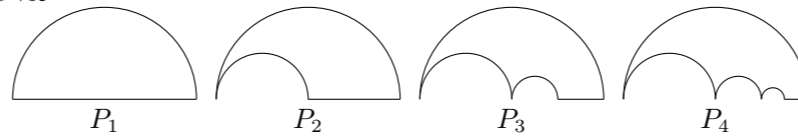
- (A) $\frac{1}{10}$ (B) $\frac{1}{20}$ (C) $\frac{1}{40}$ (D) $\frac{1}{120}$

12. 若三棱锥 $A-BCD$ 的侧面 ABC 内一动点 P 到底面 BCD 的距离与到棱 AB 的距离相等, 则动点 P 的轨迹与 $\triangle ABC$ 组成图形可能是 ()



二、填空题

13. 若在 $(1+ax)^5$ 的展开式中 x^3 的系数为 -80 , 则 $a =$ _____.
14. 曲线 $y = 2 - \frac{1}{2}x^2$ 与 $y = \frac{1}{4}x^3 - 2$ 在交点处切线的夹角是_____. (用弧度数作答)
15. 如图 P_1 是一块半径为 1 的半圆形纸板, 在 P_1 的左下端剪去一个半径为 $\frac{1}{2}$ 的半圆后得到图形 P_2 , 然后依次剪去一个更小半圆 (其直径为前一个被剪掉半圆的半径) 得圆形 $P_3, P_4, \dots, P_n, \dots$, 记纸板 P_n 的面积为 S_n , 则 $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n =$ _____.



16. 对任意实数 k , 直线 $y = kx + b$ 与椭圆 $\begin{cases} x = \sqrt{3} + 2\cos\theta, \\ y = 1 + 4\sin\theta, \end{cases} (0 \leq \theta \leq 2\pi)$ 恰有一个公共点, 则 b 取值范围是_____.

三、解答题

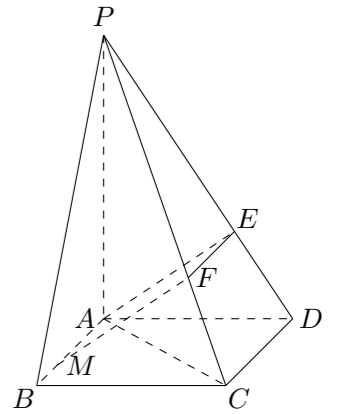
17. 求函数 $y = \sin^4 x + 2\sqrt{3}\sin x \cos x - \cos^4 x$ 的取小正周期和取小值; 并写出该函数在 $[0, \pi]$ 上的单调递增区间.

18. 设一汽车在前进途中要经过 4 个路口, 汽车在每个路口遇到绿灯的概率为 $\frac{3}{4}$, 遇到红灯 (禁止通行) 的概率为 $\frac{1}{4}$. 假定汽车只在遇到红灯或到达目的地才停止前进, ξ 表示停车时已经通过的路口数, 求:

- (1) ξ 的概率的分布列及期望 $E\xi$;
- (2) 停车时最多已通过 3 个路口的概率.

19. 如图, 四棱锥 $P-ABCD$ 的底面是正方形, $PA \perp$ 底面 $ABCD$, $AE \perp PD$, $EF \parallel CD$, $AM = EF$.

- (1) 证明: MF 是异面直线 AB 与 PC 的公垂线;
- (2) 若 $PA = 3AB$, 求直线 AC 与平面 EAM 所成角的正弦值.



20. 设函数 $f(x) = x(x-1)(x-a)$ ($a > 1$).

- (1) 求导数 $f'(x)$, 并证明 $f(x)$ 有两个不同的极值点 x_1, x_2 ;
- (2) 若不等式 $f(x_1) + f(x_2) \leq 0$ 成立, 求 a 的取值范围.

21. 设 $p > 0$ 是一常数, 过点 $Q(2p, 0)$ 的直线与抛物线 $y^2 = 2px$ 交于相异两点 A, B , 以线段 AB 为直径作圆 H (H 为圆心). 试证抛物线顶点在圆 H 的圆周上; 并求圆 H 的面积最小时直线 AB 的方程.

22. 设数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1 = 2, a_{n+1} = a_n + \frac{1}{a_n}$ ($n = 1, 2, 3, \dots$).

- (1) 证明 $a_n > \sqrt{2n+1}$ 对一切正整数 n 成立;
- (2) 令 $b_n = \frac{a_n}{\sqrt{n}}$ ($n = 1, 2, 3, \dots$), 判断 b_n 与 b_{n+1} 的大小, 并说明理由.