2005 普通高等学校招生考试 (上海卷理)

一、填空题

1. 函数 $f(x)=\log_4(x+1)$ 的反函数 $f^{-1}(x)=$______.

2. 方程 $4^x+2^x-2=0$ 的解是______.

3. 直角坐标平面 xOy 中, 若定点 $A(1,2)$ 与动点 $P(x,y)$ 满足 $\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{OA}=4$, 则点 P 的轨迹方程是______.

4. 在 $(x-a)^{10}$ 的展开式中, x^7 的系数是 15, 则实数 $a=$______.

5. 若双曲线的渐近线方程为 $y=\pm 3x$, 它的一个焦点是 $\left(\sqrt{10},0\right)$, 则双曲线的方程是______.

6. 将参数方程 $\begin{cases}x=1+2\cos\theta,\\ y=2\sin\theta,\end{cases}$ (θ 为参数) 化为普通方程, 所得方程是______.

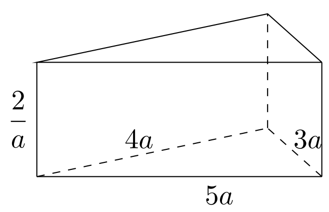
7. 计算: $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3^{n+1}-2^n}{3^n+2^{n-1}}=$______.

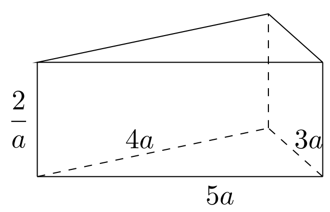
8. 某班有 50 名学生, 其中 15 人选修 A 课程, 另外 35 人选修 B 课程. 从班级中任选两名学生, 他们是选修不同课程的学生的概率是______. (结果用分数表示)

9. 在 $\triangle ABC$ 中, 若 $A=120^\circ$, $AB=5$, $BC=7$, 则 $\triangle ABC$ 的面积 $S=$______.

10. 函数 $f(x)=\sin x+2|\sin x|$, $x\in[0,2\pi]$ 的图象与直线 $y=k$ 有且仅有两个不同的交点, 则 k 的取值范围是______.

11. 有两个相同的直三棱柱, 高为 $\dfrac{2}{a}$, 底面三角形的三边长分别为 $3a$, $4a$, $5a$ $(a>0)$. 用它们拼成一个三棱柱或四棱柱, 在所有可能的情形中, 全面积最小的是一个四棱柱, 则 a 的取值范围是______.





12. 用 n 个不同的实数 a_1, a_2, $\cdots$, a_n 可得到 $n!$ 个不同的排列, 每个排列为一行写成一个 $n!$ 行的数阵. 对第 i 行 a_{i1}, a_{i2}, $\cdots$, a_{in}, 记 $b_i=-a_{i1}+2a_{i2}-3a_{i3}+\cdots+(-1)^n na_{in}$, $i=1,2,3,\cdots,n!$. 例如: 用 1, 2, 3 可得数阵如图, 由于此数阵中每一列各数之和都是 12, 所以, $b_1+b_2+\cdots+b_6=-12+2\times 12-3\times 12=-24$, 那么, 在用 1, 2, 3, 4, 5 形成的数阵中, $b_1+b_2+\cdots+b_{120}=$______.

1	2	3
1	3	2
2	1	3
2	3	1
3	1	2
3	2	1

二、选择题

13. 若函数 $f(x)=\dfrac{1}{2^x+1}$, 则该函数在 $(-\infty,+\infty)$ 上是 ( )

    (A) 单调递减无最小值　(B) 单调递减有最小值

    (C) 单调递增无最大值　(D) 单调递增有最大值

14. 已知集合 $M=\{x\mid |x-1|\leqslant 2,\ x\in\mathbf{R}\}$, $P=\left\{x\,\middle|\,\dfrac{5}{x+1}\geqslant 1,\ x\in\mathbf{Z}\right\}$, 则 $M\cap P$ 等于 ( )

    (A) $\{x\mid 0<x\leqslant 3,\ x\in\mathbf{Z}\}$　(B) $\{x\mid 0\leqslant x\leqslant 3,\ x\in\mathbf{Z}\}$

    (C) $\{x\mid -1\leqslant x\leqslant 0,\ x\in\mathbf{Z}\}$　(D) $\{x\mid -1\leqslant x<0,\ x\in\mathbf{Z}\}$

15. 过抛物线 $y^2=4x$ 的焦点作一条直线与抛物线相交于 A、B 两点, 它们的横坐标之和等于 5, 则这样的直线 ( )

    (A) 有且仅有一条　(B) 有且仅有两条

    (C) 有无穷多条　(D) 不存在

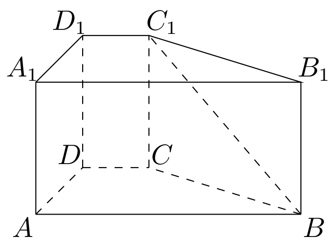
16. 设定义域为 $\mathbf{R}$ 的函数 $f(x)=\begin{cases}|\lg|x-1||, & x\neq 1,\\ 0, & x=1,\end{cases}$ 则关于 x 的方程 $f^2(x)+bf(x)+c=0$ 有 7 个不同实数解的充要条件是 ( )

    (A) $b<0$ 且 $c>0$　(B) $b>0$ 且 $c<0$

    (C) $b<0$ 且 $c=0$　(D) $b\geqslant 0$ 且 $c=0$

三、解答题

17. 如图, 已知直四棱柱 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中, $AA_1=2$, 底面 $ABCD$ 是直角梯形, $\angle A$ 是直角, $AB\parallel CD$, $AB=4$, $AD=2$, $DC=1$, 求异面直线 BC_1 与 DC 所成角的大小. (结果用反三角函数值表示)

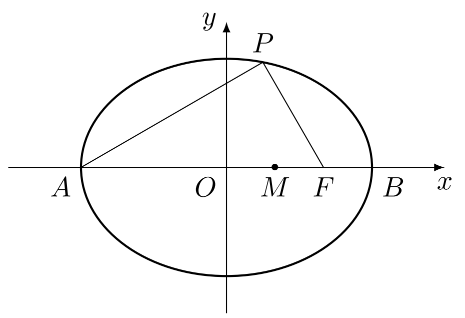


18. 证明: 在复数范围内, 方程 $|z|^2+(1-\mathrm{i})\overline{z}-(1+\mathrm{i})z=\dfrac{5-5\mathrm{i}}{2+\mathrm{i}}$ (i 为虚数单位) 无解.

19. 如图, 点 A、B 分别是椭圆 $\dfrac{x^2}{36}+\dfrac{y^2}{20}=1$ 长轴的左、右端点, 点 F 是椭圆的右焦点, 点 P 在椭圆上, 且位于 x 轴上方, $PA\perp PF$.

    (1) 求点 P 的坐标;

    (2) 设 M 是椭圆长轴 AB 上的一点, M 到直线 AP 的距离等于 $|MB|$, 求椭圆上的点到点 M 的距离 d 的最小值.



20. 假设某市 2004 年新建住房面积 400 万平方米, 其中有 250 万平方米是中低价房. 预计在今后的若干年内, 该市每年新建住房面积平均比上一年增长 8%. 另外, 每年新建住房中, 中低价房的面积均比上一年增加 50 万平方米. 那么, 到哪一年底,

(1) 该市历年所建中低价层的累计面积 (以 2004 年为累计的第一年) 将首次不少于 4750 万平方米?

(2) 当年建造的中低价房的面积占该年建造住房面积的比例首次大于 85%?

21. 对定义域是 D_f、D_g 的函数 $y=f(x)$、$y=g(x)$, 规定: 函数
$$h(x)=\begin{cases} f(x)g(x), & \text{当 } x\in D_f \text{ 且 } x\in D_g, \\ f(x), & \text{当 } x\in D_f \text{ 且 } x\notin D_g, \\ g(x), & \text{当 } x\notin D_f \text{ 且 } x\in D_g. \end{cases}$$

(1) 若函数 $f(x)=\dfrac{1}{x-1}$, $g(x)=x^2$, 写出函数 $h(x)$ 的解析式;

(2) 求问题 (1) 中函数 $h(x)$ 的值域;

(3) 若 $g(x)=f(x+\alpha)$, 其中 α 是常数, 且 $\alpha\in[0,\pi]$, 请设计一个定义域为 $\mathbf{R}$ 的函数 $y=f(x)$, 及一个 α 的值, 使得 $h(x)=\cos 4x$, 并予以证明.

22. 在直角坐标平面中, 已知点 $P_1(1,2)$, $P_2(2,2^2)$, $P_3(3,2^3)$, $\cdots$, $P_n(n,2^n)$, 其中 n 是正整数, 对平面上任一点 A_0, 记 A_1 为 A_0 关于点 P_1 的对称点, A_2 为 A_1 关于点 P_2 的对称点, $\cdots$, A_n 为 A_{n-1} 关于点 P_n 的对称点.

(1) 求向量 $\overrightarrow{A_0A_2}$ 的坐标;

(2) 当点 A_0 在曲线 C 上移动时, 点 A_2 的轨迹是函数 $y=f(x)$ 的图象, 其中 $f(x)$ 是以 3 为周期的周期函数, 且当 $x\in(0,3]$ 时, $f(x)=\lg x$. 求以曲线 C 为图象的函数在 $(1,4]$ 上的解析式;

(3) 对任意偶数 n, 用 n 表示向量 $\overrightarrow{A_0A_n}$ 的坐标.