2005 普通高等学校招生考试 (全国卷 I 文)

一、选择题

1. 设 I 为全集, S_1、S_2、S_3 是 I 的三个非空子集且 $S_1\cup S_2\cup S_3=I$, 则下面论断正确的是 ( )

(A) $\complement_I S_1\cap(S_2\cup S_3)=\varnothing$ (B) $S_1\subseteq(\complement_I S_2\cap\complement_I S_3)$

(C) $\complement_I S_1\cap\complement_I S_2\cap\complement_I S_3=\varnothing$ (D) $S_1\subseteq(\complement_I S_2\cup\complement_I S_3)$

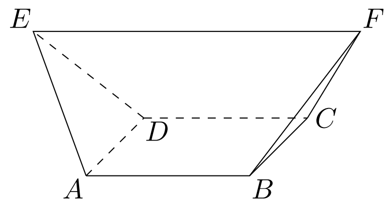
2. 一个与球心距离为 1 的平面截球所得的圆面面积为 π, 则球的表面积为( )

(A) $8\sqrt{2}\pi$ (B) 8π (C) $4\sqrt{2}\pi$ (D) 4π

3. 函数 $f(x)=x^3+ax^2+3x-9$, 已知 $f(x)$ 在 $x=-3$ 时取得极值, 则 $a=$ ( )

(A) 2 (B) 3 (C) 4 (D) 5

4. 如图, 在多面体 $ABCDEF$ 中, 已知 $ABCD$ 是边长为 1 的正方形, 且 $\triangle ADE$、$\triangle BCF$ 均为正三角形, $EF\parallel AB$, $EF=2$, 则该多面体的体积为 ( )



(A) $\dfrac{\sqrt{2}}{3}$ (B) $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$ (C) $\dfrac{4}{3}$ (D) $\dfrac{3}{2}$

5. 已知双曲线 $\dfrac{x^2}{a^2}-y^2=1\ (a>0)$ 的一条准线与抛物线 $y^2=-6x$ 的准线重合, 则该双曲线的离心率为 ( )

(A) $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ (B) $\dfrac{3}{2}$ (C) $\dfrac{\sqrt{6}}{2}$ (D) $\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$

6. 当 $0<x<\dfrac{\pi}{2}$ 时, 函数 $f(x)=\dfrac{1+\cos 2x+8\sin^2 x}{\sin 2x}$ 的最小值为 ( )

(A) 2 (B) $2\sqrt{3}$ (C) 4 (D) $4\sqrt{3}$

7. $y=\sqrt{2x-x^2}\ (1\leqslant x\leqslant 2)$ 的反函数是 ( )

(A) $y=1+\sqrt{1-x^2}\ (-1\leqslant x\leqslant 1)$ (B) $y=1+\sqrt{1-x^2}\ (0\leqslant x\leqslant 1)$

(C) $y=1-\sqrt{1-x^2}\ (-1\leqslant x\leqslant 1)$ (D) $y=1-\sqrt{1-x^2}\ (0\leqslant x\leqslant 1)$

8. 设 $0<a<1$, 函数 $f(x)=\log_a(a^{2x}-2a^x-2)$, 则使 $f(x)<0$ 的 x 取值范围是 ( )

(A) $f(x)$ (B) $(0,+\infty)$ (C) $(-\infty,\log_a 3)$ (D) $(\log_a 3,+\infty)$

9. 在坐标平面上, 不等式组 $\begin{cases} y\geqslant x-1, \\ y\leqslant -3|x|+1 \end{cases}$ 所表示的平面区域的面积为( )

(A) $\sqrt{2}$ (B) $\dfrac{3}{2}$ (C) $\dfrac{3\sqrt{2}}{2}$ (D) 2

10. 在 $\triangle ABC$ 中, 已知 $\tan\dfrac{A+B}{2}=\sin C$, 给出以下四个论断: ① $\tan A\cdot\cot B=1$; ② $0<\sin A+\sin B\leqslant\sqrt{2}$; ③ $\sin^2 A+\cos^2 B=1$; ④ $\cos^2 A+\cos^2 B=\sin^2 C$. 其中正确的是 ( )

(A) ①③ (B) ②④ (C) ①④ (D) ②③

11. 点 O 是三角形 ABC 所在平面内的一点, 满足 $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OC}\cdot\overrightarrow{OA}$, 则点 O 是 $\triangle ABC$ 的 ( )

(A) 三个内角的角平分线的交点 (B) 三条边的垂直平分线的交点

(C) 三条中线的交点 (D) 三条高的交点

12. 设直线 l 过点 $(-2,0)$, 且与圆 $x^2+y^2=1$ 相切, 则 l 的斜率是 ( )

(A) ± 1 (B) $\pm\dfrac{1}{2}$ (C) $\pm\dfrac{\sqrt{3}}{3}$ (D) $\pm\sqrt{3}$

二、填空题

13. 若正整数 m 满足 $10^{m-1}<2^{512}<10^m$, 则 $m=$______. $(\lg 2\approx 0.3010)$

14. $\left(x-\dfrac{1}{x}\right)^8$ 的展开式中, 常数项为______. (用数字作答)

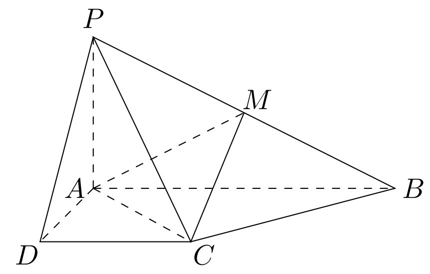
15. 从 6 名男生和 4 名女生中, 选出 3 名代表, 要求至少包含 1 名女生, 则不同的选法有______种.

16. 在正方体 $ABCD-A'B'C'D'$ 中, 过对角线 BD' 的一个平面交 AA' 于 E, 交 CC' 于 F, 则:
① 四边形 $BFD'E$ 一定是平行四边形;
② 四边形 $BFD'E$ 有可能是正方形;
③ 四边形 $BFD'E$ 在底面 $ABCD$ 内的投影一定是正方形;
④ 平面 $BFD'E$ 有可能垂直于平面 $BB'D$.
以上结论正确的为______. (写出所有正确结论的编号)

三、解答题

17. 设函数 $f(x)=\sin(2\pi+\varphi)\ (-\pi<\varphi<0)$, $y=f(x)$ 图象的一条对称轴是直线 $x=\dfrac{\pi}{8}$.
(1) 求 φ;
(2) 求函数 $y=f(x)$ 的单调增区间;
(3) 画出函数 $y=f(x)$ 在区间 $[0,\pi]$ 上的图象.

18. 已知四棱锥 $P-ABCD$ 的底面为直角梯形, $AB\parallel DC$, $\angle DAB=90^\circ$, $PA\perp$ 底面 $ABCD$, 且 $PA=AD=DE=\dfrac{1}{2}AB=1$, M 是 PB 的中点.
(1) 证明: 面 $PAD\perp$ 面 PCD;
(2) 求 AC 与 PB 所成的角;
(3) 求面 AMC 与面 BMC 所成二面角的大小.



19. 已知二次函数 $f(x)$ 的二次项系数为 a, 且不等式 $f(x)>-2x$ 的解集为 $(1,3)$.
(1) 若方程 $f(x)+6a=0$ 有两个相等的根, 求 $f(x)$ 的解析式;
(2) 若 $f(x)$ 的最大值为正数, 求 a 的取值范围.

20. 9 粒种子分种在甲、乙、丙 3 个坑内, 每坑 3 粒, 每粒种子发芽的概率为 0.5. 若一个坑内至少有 1 粒种子发芽, 则这个坑不需要补种; 若一个坑内的种子都没发芽, 则这个坑需要补种.

(1) 求甲坑不需要补种的概率;

(2) 求 3 个坑中恰有 1 个坑不需要补种的概率;

(3) 求有坑需要补种的概率. (精确到 0.001)

21. 设正项等比数列 $\{a_n\}$ 的首项 $a_1 = \dfrac{1}{2}$, 前 n 项和为 S_n, 且 $2^{10}S_{30} - (2^{10} + 1)S_{20} + S_{10} = 0$.

(1) 求 $\{a_n\}$ 的通项;

(2) 求 $\{nS_n\}$ 的前 n 项和 T_n.

22. 已知椭圆的中心为坐标原点 O, 焦点在 x 轴上, 斜率为 1 且过椭圆右焦点 F 的直线交椭圆于 A、B 两点, $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}$ 与 $\vec{a} = (3, -1)$ 共线.

(1) 求椭圆的离心率;

(2) 设 M 为椭圆上任意一点, 且 $\overrightarrow{OM} = \lambda\overrightarrow{OA} + \lambda\overrightarrow{OB}$ (λ, $\mu \in \mathbf{R}$), 证明 $\lambda^2 + \mu^2$ 为定值.