2005 普通高等学校招生考试 (全国卷 II 理)

一、选择题

1. 函数 $f(x)=|\sin x+\cos x|$ 的最小正周期是 ( )

(A) $\frac{\pi}{4}$ (B) $\frac{\pi}{2}$ (C) π (D) 2π

2. 正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中, P、Q、R 分别是 AB、AD、B_1C_1 的中点. 那么, 正方体的过 P、Q、R 的截面图形是 ( )

(A) 三角形 (B) 四边形 (C) 五边形 (D) 六边形

3. 函数 $y=\sqrt[3]{x^2-1}$ $(x\leqslant 0)$ 的反函数是 ( )

(A) $y=\sqrt{(x+1)^3}$ $(x\geqslant -1)$ (B) $y=-\sqrt{(x+1)^3}$ $(x\geqslant -1)$

(C) $y=\sqrt{(x+1)^3}$ $(x\geqslant 0)$ (D) $y=-\sqrt{(x+1)^3}$ $(x\geqslant 0)$

4. 已知函数 $y=\tan\omega x$ 在 $\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$ 内是减函数, 则 ( )

(A) $0<\omega\leqslant 1$ (B) $-1\leqslant\omega<0$ (C) $\omega\geqslant 1$ (D) $\omega\leqslant -1$

5. 设 a、b、c、$d\in\mathbf{R}$, 若 $\frac{a+bi}{c+di}$ 为实数, 则 ( )

(A) $bc+ad\neq 0$ (B) $bc-ad\neq 0$

(C) $bc-ad=0$ (D) $bc+ad=0$

6. 已知双曲线 $\frac{x^2}{6}-\frac{y^2}{3}=1$ 的焦点为 F_1、F_2, 点 M 在双曲线上且 $MF_1\perp x$ 轴, 则 F_1 到直线 F_2M 的距离为 ( )

(A) $\frac{3\sqrt{6}}{5}$ (B) $\frac{5\sqrt{6}}{6}$ (C) $\frac{6}{5}$ (D) $\frac{5}{6}$

7. 锐角三角形的内角 A、B 满足 $\tan A-\frac{1}{\sin 2A}=\tan B$, 则有 ( )

(A) $\sin 2A-\cos B=0$ (B) $\sin 2A+\cos B=0$

(C) $\sin 2A-\sin B=0$ (D) $\sin 2A+\sin B=0$

8. 已知点 $A(\sqrt{3},1)$, $B(0,0)$, $C(\sqrt{3},0)$. 设 $\angle BAC$ 的平分线 AE 与 BC 相交于 E, 那么有 $\overrightarrow{BC}=\lambda\overrightarrow{CE}$, 其中 λ 等于 ( )

(A) 2 (B) $\frac{1}{2}$ (C) -3 (D) $-\frac{1}{3}$

9. 已知集合 $M=\{x\mid x^2-3x-28\leqslant 0\}$, $N=\{x\mid x^2-x-6>0\}$, 则 $M\cap N$ 为 ( )

(A) $\{x\mid -4\leqslant x<-2$ 或 $3<x\leqslant 7\}$

(B) $\{x\mid -4<x\leqslant -2$ 或 $3\leqslant x<7\}$

(C) $\{x\mid x\leqslant -2$ 或 $x>3\}$

(D) $\{x\mid x<-2$ 或 $x\geqslant 3\}$

10. 点 P 在平面上作匀速直线运动, 速度向量 $\boldsymbol{v}=(4,-3)$ (即点 P 的运动方向与 $\boldsymbol{v}$ 相同, 且每秒移动的距离为 $|\boldsymbol{v}|$ 个单位). 设开始时点 P 的坐标为 $(-10,10)$, 则 5 秒后点 P 的坐标为 ( )

(A) $(-2,4)$ (B) $(-30,25)$ (C) $(10,-5)$ (D) $(5,-10)$

11. 如果 a_1, a_2, $\cdots$, a_8 为各项都大于零的等差数列, 公差 $d\neq 0$, 则 ( )

(A) $a_1a_8>a_4a_5$ (B) $a_1a_8<a_4a_5$

(C) $a_1+a_8>a_4+a_5$ (D) $a_1a_8=a_4a_5$

12. 将半径都为 1 的 4 个铅球完全装入形状为正四面体的容器里, 这个正四面体的高最小值为 ( )

(A) $\frac{\sqrt{3}+2\sqrt{6}}{3}$ (B) $2+\frac{2\sqrt{6}}{3}$ (C) $4+\frac{2\sqrt{6}}{3}$ (D) $\frac{4\sqrt{3}+2\sqrt{6}}{3}$

二、填空题

13. 圆心为 $(1,2)$ 且与直线 $5x-12y-7=0$ 相切的圆的方程为______.

14. 设 α 为第四象限的角, 若 $\frac{\sin 3\alpha}{\sin\alpha}=\frac{13}{5}$, 则 $\tan 2\alpha=$______.

15. 在由数字 0, 1, 2, 3, 4, 5 所组成的没有重复数字的四位数中, 不能被 5 整除的数共有______个.

16. 下面是关于三棱锥的四个命题:

① 底面是等边三角形, 侧面与底面所成的二面角都相等的三棱锥是正三棱锥;

② 底面是等边三角形, 侧面都是等腰三角形的三棱锥是正三棱锥;

③ 底面是等边三角形, 侧面的面积都相等的三棱锥是正三棱锥;

④ 侧棱与底面所成的角都相等, 且侧面与底面所成的二面角都相等的三棱锥是正三棱锥.

其中, 真命题的编号是______. (写出所有真命题的编号)

三、解答题

17. 设函数 $f(x)=2^{|x+1|-|x-1|}$, 求使 $f(x)\geqslant 2\sqrt{2}$ 的 x 的取值范围.

18. 已知 $\{a_n\}$ 是各项均为正数的等差数列, $\lg a_1$、$\lg a_2$、$\lg a_4$ 成等差数列. 又 $b_n=\frac{1}{a_{2^n}}$, $n=1, 2, 3, \cdots$.

(1) 证明 $\{b_n\}$ 为等比数列;

(2) 如果无穷等比数列 $\{b_n\}$ 各项的和 $S=\frac{1}{3}$, 求数列 $\{a_n\}$ 的首项 a_1 和公差 d.

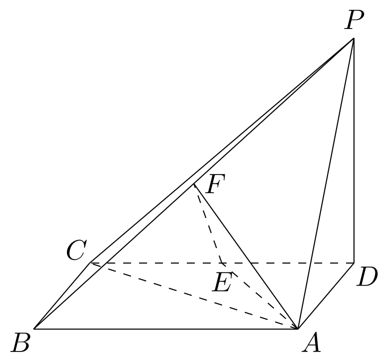
注: 无穷数列各项的和即当 $n\to\infty$ 时数列前 n 项和的极限.

19. 甲、乙两队进行一场排球比赛. 根据以往经验, 单局比赛甲队胜乙队的概率为 0.6. 本场比赛采用五局三胜制, 即先胜三局的队获胜, 比赛结束. 设各局比赛相互间没有影响. 令 ξ 为本场比赛的局数, 求 ξ 的概率分布和数学期望. (精确到 0.0001)

20. 如图, 四棱锥 $P-ABCD$ 中, 底面 $ABCD$ 为矩形, $PD\perp$ 底面 $ABCD$, $AD=PD$, E、F 分别为 CD、PB 的中点.

(1) 求证: $EF\perp$ 平面 PAB;

(2) 设 $AB=\sqrt{2}BC$, 求 AC 与平面 AEF 所成的角的大小.



21. P、Q、M、N 四点都在椭圆 $x^2+\dfrac{y^2}{2}=1$ 上, F 为椭圆在 y 轴正半轴上的焦点. 已知 $\overrightarrow{PF}$ 与 $\overrightarrow{FQ}$ 共线, $\overrightarrow{MF}$ 与 $\overrightarrow{FN}$ 共线, 且 $\overrightarrow{PF}\cdot\overrightarrow{MF}=0$. 求四边形 $PMQN$ 的面积的最小值和最大值.

22. 已知 $a\geqslant 0$, 函数 $f(x)=(x^2-2ax)\mathrm{e}^x$.

(1) 当 x 为何值时, $f(x)$ 取得最小值? 证明你的结论;

(2) 设 $f(x)$ 在 $[-1,1]$ 上是单调函数, 求 a 的取值范围.