2005 普通高等学校招生考试 (北京卷文)

一、选择题

1. 设合集 $U=\mathbf{R}$, 集合 $M=\{x \mid x>1\}$, $P=\{x \mid x^2>1\}$, 则下列关系中正确的是 ( )

   (A) $M=P$ (B) $P \subsetneqq M$

   (C) $M \subsetneqq P$ (D) $M \cap P=\mathbf{R}$

2. 为了得到函数 $y=2^{x-3}-1$ 的图象, 只需把函数 $y=2^x$ 的图象上所有的点 ( )

   (A) 向右平移 3 个单位长度, 再向下平移 1 个单位长度

   (B) 向左平移 3 个单位长度, 再向下平移 1 个单位长度

   (C) 向右平移 3 个单位长度, 再向上平移 1 个单位长度

   (D) 向左平移 3 个单位长度, 再向上平移 1 个单位长度

3. "$m=\frac{1}{2}$"是"直线 $(m+2)x+3my+1=0$ 与直线 $(m-2)x+(m+2)y-3=0$ 相互垂直"的 ( )

   (A) 充分必要条件 (B) 充分而不必要条件

   (C) 必要而不充分条件 (D) 既不充分也不必要条件

4. 若 $|\vec{a}|=1$, $|\vec{b}|=2$, $\vec{c}=\vec{a}+\vec{b}$, 且 $\vec{c} \perp \vec{a}$, 则向量 $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 的夹角为( )

   (A) $30°$ (B) $60°$ (C) $120°$ (D) $150°$

5. 从原点向圆 $x^2+y^2-12y+27=0$ 作两条切线, 则这两条切线的夹角的大小为 ( )

   (A) $\frac{\pi}{6}$ (B) $\frac{\pi}{3}$ (C) $\frac{\pi}{2}$ (D) $\frac{2\pi}{3}$

6. 对任意的锐角 α, β, 下列不等关系中正确的是 ( )

   (A) $\sin(\alpha+\beta)>\sin\alpha+\sin\beta$ (B) $\sin(\alpha+\beta)>\cos\alpha+\cos\beta$

   (C) $\cos(\alpha+\beta)<\sin\alpha+\sin\beta$ (D) $\cos(\alpha+\beta)<\cos\alpha+\cos\beta$

7. 在正四面体 $P-ABC$ 中, D, E, F 分别是 AB, BC, CA 的中点, 下面四个结论中不成立的是 ( )

   (A) $BC \parallel$ 平面 PDF (B) $DF \perp$ 平面 PAE

   (C) 平面 $PDF \perp$ 平面 ABC (D) 平面 $PAE \perp$ 平面 ABC

8. 五个工程队承建某项工程的 5 个不同的子项目, 每个工程队承建 1 项, 其中甲工程队不能承建 1 号子项目, 则不同的承建方案共有 ( )

   (A) $\mathrm{C}_4^1\mathrm{C}_4^4$ 种 (B) $\mathrm{C}_4^1\mathrm{A}_4^4$ 种 (C) C_4^4 种 (D) A_4^4 种

二、填空题

9. 抛物线 $y^2=4x$ 的准线方程是______, 焦点坐标是______.

10. $\left(x-\frac{1}{x}\right)^6$ 的展开式中的常数项是______. (用数字作答)

11. 函数 $f(x)=\sqrt{x+1}+\frac{1}{2-x}$ 的定义域为______.

12. 在 $\triangle ABC$ 中, $AC=\sqrt{3}$, $\angle A=45°$, $\angle C=75°$, 则 BC 的长为______.

13. 对于函数 $f(x)$ 定义域中任意的 x_1, x_2 $(x_1 \neq x_2)$, 有如下结论:

   ① $f(x_1+x_2)=f(x_1)\cdot f(x_2)$;

   ② $f(x_1\cdot x_2)=f(x_1)+f(x_2)$;

   ③ $\frac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2}>0$;

   ④ $f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)<\frac{f(x_1)+f(x_2)}{2}$.

   当 $f(x)=\lg x$ 时, 上述结论中正确结论的序号是______.

14. 已知 n 次多项式 $P_n(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_{n-1}x+a_n$.

   如果在一种算法中, 计算 x_0^k $(k=2, 3, 4, \cdots, n)$ 的值需要 $k-1$ 次乘法, 计算 $P_3(x_0)$ 的值共需要 9 次运算 (6 次乘法, 3 次加法), 那么计算 $P_{10}(x_0)$ 的值共需要______次运算.

   下面给出一种减少运算次数的算法: $P_0(x)=a_0$, $P_{k+1}(x)=xP_k(x)+a_{k+1}$ $(k=0, 1, 2, \cdots, n-1)$. 利用该算法, 计算 $P_3(x_0)$ 的值共需要 6 次运算, 计算 $P_{10}(x_0)$ 的值共需要______次运算.

三、解答题

15. 已知 $\tan\frac{\alpha}{2}=2$, 求:

   (1) $\tan\left(\alpha+\frac{\pi}{4}\right)$ 的值;

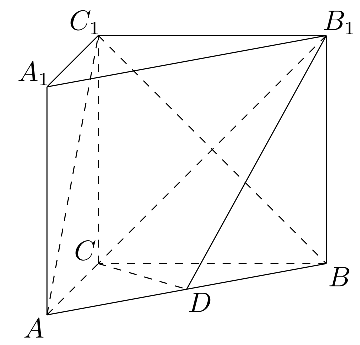
   (2) $\frac{6\sin\alpha+\cos\alpha}{3\sin\alpha-2\cos\alpha}$ 的值.

16. 如图, 在直三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中, $AC=3$, $BC=4$, $AB=5$, $AA_1=4$, 点 D 是 AB 的中点.

   (1) 求证: $AC \perp BC_1$;

   (2) 求证: $AC_1 \parallel$ 平面 CDB_1;

   (3) 求异面直线 AC_1 与 B_1C 所成角的余弦值.



17. 数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n, 且 $a_1=1$, $a_{n+1}=\frac{1}{3}S_n$, $n=1, 2, 3, \cdots$, 求:

   (1) a_2, a_3, a_4 的值及数列 $\{a_n\}$ 的通项公式;

   (2) $a_2+a_4+a_6+\cdots+a_{2n}$ 的值.

18. 甲、乙两人各进行 3 次射击, 甲每次击中目标的概率为 $\dfrac{1}{2}$, 乙每次击中目标的概率为 $\dfrac{2}{3}$.

(1) 甲恰好击中目标 2 次的概率;

(2) 乙至少击中目标 2 次的概率;

(3) 乙恰好比甲多击中目标 2 次的概率.

19. 已知函数 $f(x)=-x^3+3x^2+9x+a$.

(1) 求 $f(x)$ 的单调减区间;

(2) 若 $f(x)$ 在区间 $[-2,2]$ 上的最大值为 20, 求它在该区间上的最小值.

20. 如图, 直线 l_1: $y=kx$ $(k>0)$ 与直线 l_2: $y=-kx$ 之间的阴影区域 (不含边界) 记为 W, 其左半部分记为 W_1, 右半部分记为 W_2.

(1) 分别用不等式组表示 W_1 和 W_2;

(2) 若区域 W 中的动点 $P(x,y)$ 到 l_1, l_2 的距离之积等于 d^2, 求点 P 的轨迹 C 的方程;

(3) 设不过原点 O 的直线 l 与 (2) 中的曲线 C 相交于 M_1, M_2 两点, 且与 l_1, l_2 分别交于 M_3, M_4 两点. 求证: $\triangle OM_1M_2$ 的重心与 $\triangle OM_3M_4$ 的重心重合.