2005 普通高等学校招生考试 (天津卷文)

一、选择题

1. 设集合 $A=\{x\mid 0\leqslant x<3$ 且 $x\in\mathbf{N}\}$ 的真子集的个数是 ( )

(A) 16　(B) 8　(C) 7　(D) 4

2. 已知 $\log_{\frac{1}{2}}b<\log_{\frac{1}{2}}a<\log_{\frac{1}{2}}c$, 则 ( )

(A) $2^b>2^a>2^c$　(B) $2^a>2^b>2^c$　(C) $2^c>2^b>2^a$　(D) $2^c>2^a>2^b$

3. 某人射击一次击中的概率为 0.6, 经过 3 次射击, 此人至少有两次击中目标的概率为 ( )

(A) $\dfrac{81}{125}$　(B) $\dfrac{54}{125}$　(C) $\dfrac{36}{125}$　(D) $\dfrac{27}{125}$

4. 将直线 $2x-y+\lambda=0$ 沿 x 轴向左平移 1 个单位, 所得直线与圆 $x^2+y^2+2x-4y=0$ 相切, 则实数 λ 的值为

(A) -3 或 7　(B) -2 或 8　(C) 0 或 10　(D) 1 或 11

5. 设 α,β,γ 为平面, m,n,l 为直线, 则 $m\perp\beta$ 的一个充分条件是 ( )

(A) $\alpha\perp\beta,\alpha\cap\beta=l,m\perp l$　(B) $\alpha\cap\gamma=m,\alpha\perp\gamma,\beta\perp\gamma$

(C) $\alpha\perp\gamma,\beta\perp\gamma,m\perp\alpha$　(D) $n\perp\alpha,n\perp\beta,m\perp\alpha$

6. 设双曲线以椭圆 $\dfrac{x^2}{25}+\dfrac{y^2}{9}=1$ 长轴的两个端点为焦点, 其准线过椭圆的焦点, 则双曲线的渐近线的斜率为 ( )

(A) ±2　(B) $\pm\dfrac{4}{3}$　(C) $\pm\dfrac{1}{2}$　(D) $\pm\dfrac{3}{4}$

7. 给出下列三个命题:

① 若 $a\geqslant b>-1$, 则 $\dfrac{a}{1+a}\geqslant\dfrac{b}{1+b}$;

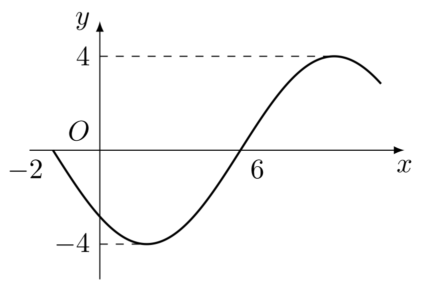
② 若正整数 m 和 n 满足 $m\leqslant n$, 则 $\sqrt{m(n-m)}\leqslant\dfrac{n}{2}$;

③ 设 $P(x_1,y_1)$ 为圆 O_1: $x^2+y^2=9$ 上任一点, 圆 O_2 以 $Q(a,b)$ 为圆心且半径为 1. 当 $(a-x_1)^2+(b-y_1)^2=1$ 时, 圆 O_1 与圆 O_2 相切.

其中假命题的个数为 ( )

(A) 0　(B) 1　(C) 2　(D) 3

8. 函数 $y=A\sin(\omega x+\varphi)$ $\left(\omega>0,\ |\varphi|<\dfrac{\pi}{2},\ x\in\mathbf{R}\right)$ 的部分图象如图所示, 则函数表达式为 ( )



(A) $y=-4\sin\left(\dfrac{\pi}{8}x+\dfrac{\pi}{4}\right)$　(B) $y=4\sin\left(\dfrac{\pi}{8}x-\dfrac{\pi}{4}\right)$

(C) $y=-4\sin\left(\dfrac{\pi}{8}x-\dfrac{\pi}{4}\right)$　(D) $y=4\sin\left(\dfrac{\pi}{8}x+\dfrac{\pi}{4}\right)$

9. 若函数 $f(x)=\log_a(2x^2+x)$ $(a>0,\ a\neq1)$ 在区间 $\left(0,\dfrac{1}{2}\right)$ 内恒有 $f(x)>0$, 则 $f(x)$ 的单调递增区间为 ( )

(A) $\left(-\infty,-\dfrac{1}{4}\right)$　(B) $\left(-\dfrac{1}{4},+\infty\right)$

(C) $(0,+\infty)$　(D) $\left(-\infty,-\dfrac{1}{2}\right)$

10. 设 $f(x)$ 是定义在 $\mathbf{R}$ 上以 6 为周期的函数, $f(x)$ 在 $(0,3)$ 内单调递增, 且 $y=f(x)$ 的图象关于直线 $x=3$ 对称, 则下面正确的结论是 ( )

(A) $f(1.5)<f(3.5)<f(6.5)$　(B) $f(3.5)<f(1.5)<f(6.5)$

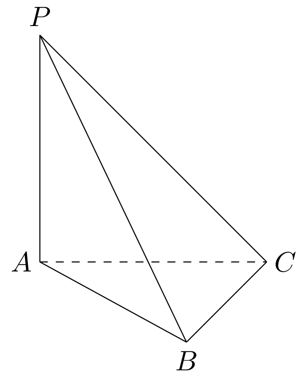
(C) $f(6.5)<f(3.5)<f(1.5)$　(D) $f(3.5)<f(6.5)<f(1.5)$

二、填空题

11. 二项式 $\left(\sqrt[3]{x}-\dfrac{1}{\sqrt{x}}\right)^{10}$ 的展开式中常数项为______. (用数字作答)

12. 已知 $|\vec{a}|=2$, $\left|\vec{b}\right|=4$, $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 的夹角为 $\dfrac{\pi}{3}$, 以 $\vec{a}$, $\vec{b}$ 为邻边作平行四边形, 则此平行四边形的两条对角线中较短的一条的长度为______.

13. 如图, $PA\perp$ 平面 ABC, $\angle ACB=90^\circ$ 且 $PA=AC=BC=a$, 则异面直线 PB 与 AC 所成角的正切值等于______.

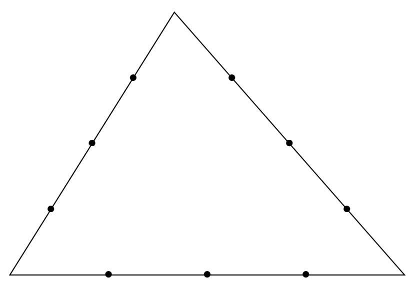


14. 在数列 $\{a_n\}$ 中, $a_1=1$, $a_2=2$, 且 $a_{n+2}-a_n=1+(-1)^n$ $(n\in\mathbf{N}^*)$, 则 $S_{10}=$______.

15. 在直角坐标系 xOy 中, 已知点 $A(0,1)$ 和点 $B(-3,4)$, 若点 C 在 $\angle AOB$ 的平分线上且 $\left|\overrightarrow{OC}\right|=2$, 则 $\overrightarrow{OC}=$______.

16. 设函数 $f(x)=\ln\dfrac{1+x}{1-x}$, 则函数 $g(x)=f\left(\dfrac{x}{2}\right)+f\left(\dfrac{1}{x}\right)$ 的定义域为______.

17. 在三角形的每条边上各取三个分点 (如图). 以这 9 个分点为顶点可画出若干个三角形, 若从中任意抽取一个三角形, 则其三个顶点分别落在原三角形的三条不同边上的概率为______. (用数字作答)



三、解答题

18. 已知 $\sin\left(\alpha-\dfrac{\pi}{4}\right)=\dfrac{7\sqrt{2}}{10}$, $\cos2\alpha=\dfrac{7}{25}$, 求 $\sin\alpha$ 及 $\tan\left(\alpha+\dfrac{\pi}{3}\right)$.

19. 若公比为 c 的等比数列 $\{a_n\}$ 的首项 $a_1=1$ 且满足 $a_n=\dfrac{a_{n-1}+a_{n-2}}{2}$ $(n=3,\ 4,\ \cdots)$.

(1) 求 c 的值;

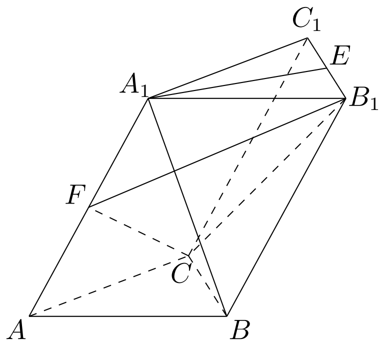
(2) 求数列 $\{na_n\}$ 的前 n 项和 S_n.

20. 如图, 在斜三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中, $\angle A_1AB=\angle A_1AC$, $AB=AC$, $A_1A=A_1B=a$, 侧面 B_1BCC_1 与底面 ABC 所成的二面角为 120°, E、F 分别是棱 B_1C_1, A_1A 的中点.

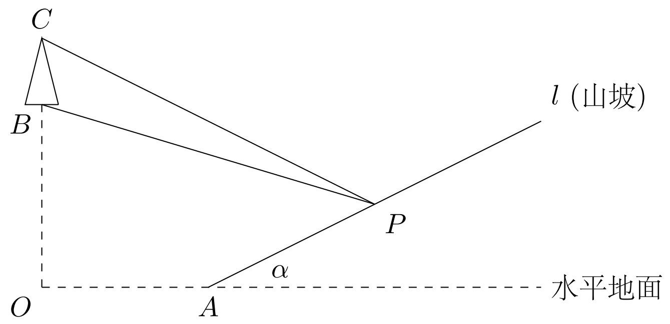
(1) 求 A_1A 与底面 ABC 所成的角;

(2) 证明 A_1E // 平面 B_1FC;

(3) 求经过 A_1, A, B, C 四点的球的体积.



21. 某人在一山坡 P 处观看对面山项上的一座铁塔, 如图所示, 塔高 $BC=80$ (米), 塔所在的山高 $OB=220$ (米), $OA=200$ (米), 图中所示的山坡可视为直线 l 且点 P 在直线 l 上, l 与水平地面的夹角为 α, $\tan\alpha=\dfrac{1}{2}$. 试问此人距水平地面多高时, 观看塔的视角 $\angle BPC$ 最大? (不计此人的身高)



22. 已知 $m\in\mathbf{R}$, 设 P: x_1 和 x_2 是方程 $x^2-ax-2=0$ 的两个实根, 不等式 $|m^2-5m-3|\geqslant|x_1-x_2|$ 对任意实数 $a\in[-1,1]$ 恒成立; Q: 函数 $f(x)=x^3+mx^2+\left(m+\dfrac{4}{3}\right)x+6$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上有极值. 求使 P 正确且 Q 正确的 m 的取值范围.

23. 抛物线 C 的方程为 $y=ax^2$ $(a<0)$, 过抛物线 C 上一点 $P(x_0,y_0)$ $(x_0\neq 0)$ 作斜率为 k_1, k_2 的两条直线分别交抛物线 C 于 $A(x_1,y_1)$, $B(x_2,y_2)$ 两点 (P, A, B 三点互不相同), 且满足 $k_2+\lambda k_1=0$ $(\lambda\neq 0,\ \lambda\neq -1)$.

(1) 求抛物线 C 的焦点坐标和准线方程;

(2) 设直线 AB 上一点 M, 满足 $\overrightarrow{BM}=\lambda\overrightarrow{MA}$, 证明线段 PM 的中点在 y 轴上;

(3) 当 $\lambda=1$ 时, 若点 P 的坐标为 $(1,-1)$, 求 $\angle PAB$ 为钝角时点 A 的纵坐标 y_1 的取值范围.