2005 普通高等学校招生考试 (天津卷理)

一、选择题

1. 设集合 $A=\{x\mid |4x-1|\geqslant 9,\ x\in\mathbf{R}\}$, $B=\left\{x\,\middle|\,\dfrac{x}{x+3}\geqslant 0,\ x\in\mathbf{R}\right\}$, 则 $A\cap B=$ ( )

   (A) $(-3,-2]$ (B) $(-3,-2]\cup\left[0,\dfrac{5}{2}\right]$

   (C) $(-\infty,-3]\cup\left[\dfrac{5}{2},+\infty\right)$ (D) $(-\infty,-3)\cup\left[\dfrac{5}{2},+\infty\right)$

2. 若复数 $\dfrac{a+3\mathrm{i}}{1+2\mathrm{i}}$ ($a\in\mathbf{R}$, i 为虚数单位位) 是纯虚数, 则实数 a 的值为 ( )

   (A) -2 (B) 4 (C) -6 (D) 6

3. 给出下列三个命题:

   ① 若 $a\geqslant b>-1$, 则 $\dfrac{a}{1+a}\geqslant\dfrac{b}{1+b}$;

   ② 若正整数 m 和 n 满足 $m\leqslant n$, 则 $\sqrt{m(n-m)}\leqslant\dfrac{n}{2}$;

   ③ 设 $P(x_1,y_1)$ 为圆 O_1: $x^2+y^2=9$ 上任一点, 圆 O_2 以 $Q(a,b)$ 为圆心且半径为 1. 当 $(a-x_1)^2+(b-y_1)^2=1$ 时, 圆 O_1 与圆 O_2 相切.

   其中假命题的个数为 ( )

   (A) 0 (B) 1 (C) 2 (D) 3

4. 设 α,β,γ 为平面, m,n,l 为直线, 则 $m\perp\beta$ 的一个充分条件是 ( )

   (A) $\alpha\perp\beta,\alpha\cap\beta=l,m\perp l$ (B) $\alpha\cap\gamma=m,\alpha\perp\gamma,\beta\perp\gamma$

   (C) $\alpha\perp\gamma,\beta\perp\gamma,m\perp\alpha$ (D) $n\perp\alpha,n\perp\beta,m\perp\alpha$

5. 设双曲线以椭圆 $\dfrac{x^2}{25}+\dfrac{y^2}{9}=1$ 长轴的两个端点为焦点, 其准线过椭圆的焦点, 则双曲线的渐近线的斜率为 ( )

   (A) ±2 (B) $\pm\dfrac{4}{3}$ (C) $\pm\dfrac{1}{2}$ (D) $\pm\dfrac{3}{4}$

6. 从集合 $\{1,\ 2,\ 3,\ \cdots,\ 11\}$ 中任选两个元素作为椭圆方程 $\dfrac{x^2}{m^2}+\dfrac{y^2}{n^2}=1$ 中的 m 和 n, 则能组成落在矩形区域 $B=\{(x,y)\mid |x|<11$ 且 $|y|<9\}$ 内的椭圆个数为 ( )

   (A) 43 (B) 72 (C) 86 (D) 90

7. 某人射击一次击中的概率为 0.6, 经过 3 次射击, 此人至少有两次击中目标的概率为 ( )

   (A) $\dfrac{81}{125}$ (B) $\dfrac{54}{125}$ (C) $\dfrac{36}{125}$ (D) $\dfrac{27}{125}$

8. 要得到函数 $y=\sqrt{2}\cos x$ 的图象, 只需将函数 $y=\sqrt{2}\sin(2x+\dfrac{\pi}{4})$ 的图象上所有的点的 ( )

   (A) 横坐标缩短到原来的 $\dfrac{1}{2}$ 倍 (纵坐标不变), 再向左平行移动 $\dfrac{\pi}{8}$ 个单位长度

   (B) 横坐标缩短到原来的 $\dfrac{1}{2}$ 倍 (纵坐标不变), 再向右平行移动 $\dfrac{\pi}{4}$ 个单位长度

   (C) 横坐标伸长到原来的 2 倍 (纵坐标不变), 再向左平行移动 $\dfrac{\pi}{4}$ 个单位长度

   (D) 横坐标伸长到原来的 2 倍 (纵坐标不变), 再向右平行移动 $\dfrac{\pi}{8}$ 个单位长度

9. 设 $f^{-1}(x)$ 是函数 $f(x)=\dfrac{1}{2}(a^x-a^{-x})$ $(a>1)$ 的反函数, 则使 $f^{-1}(x)>1$ 成立的 x 的取值范围为 ( )

   (A) $\left(\dfrac{a^2-1}{2a},+\infty\right)$ (B) $\left(-\infty,\dfrac{a^2-1}{2a}\right)$

   (C) $\left(\dfrac{a^2-1}{2a},a\right)$ (D) $[a,+\infty)$

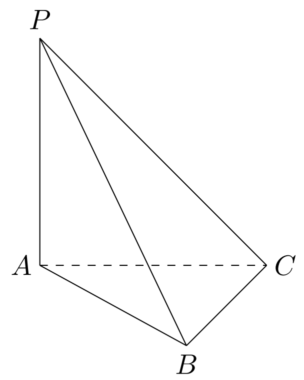
10. 若函数 $f(x)=\log_a(x^3-ax)$ $(a>0,\ a\neq1)$ 在区间 $\left(-\dfrac{1}{2},0\right)$ 内单调递增, 则 a 的取值范围是 ( )

    (A) $\left[\dfrac{1}{4},1\right)$ (B) $\left[\dfrac{3}{4},1\right)$ (C) $\left(\dfrac{9}{4},+\infty\right)$ (D) $\left(1,\dfrac{9}{4}\right)$

二、填空题

11. 设 $n\in\mathbf{N}^*$, 则 $\mathrm{C}_n^1+\mathrm{C}_n^2 6+\mathrm{C}_n^3 6^2+\cdots+\mathrm{C}_n^n 6^{n-1}=$______.

12. 如图, $PA\perp$ 平面 ABC, $\angle ACB=90^\circ$ 且 $PA=AC=BC=a$, 则异面直线 PB 与 AC 所成角的正切值等于______.



13. 在数列 $\{a_n\}$ 中, $a_1=1$, $a_2=2$, 且 $a_{n+2}-a_n=1+(-1)^n$ $(n\in\mathbf{N}^*)$, 则 $S_{100}=$______.

14. 在直角坐标系 xOy 中, 已知点 $A(0,1)$ 和点 $B(-3,4)$, 若点 C 在 $\angle AOB$ 的平分线上且 $\left|\overrightarrow{OC}\right|=2$, 则 $\overrightarrow{OC}=$______.

15. 某公司有 5 万元资金用于投资开发项目, 如果成功, 一年后可获利 12%, 一旦失败, 一年后将丧失全部资金的 50%, 下表是过去 200 例类似项目开发的实施结果:

投资成功	投资失败
192 次	8 次

    则该公司一年后估计可获收益的期望是______(元).

16. 设 $f(x)$ 是定义在 $\mathbf{R}$ 上的奇函数, 且 $y=f(x)$ 的图象关于直线 $x=\dfrac{1}{2}$ 对称, 则 $f(1)+f(2)+f(3)+f(4)+f(5)=$______.

三、解答题

17. 在 $\triangle ABC$ 中, $\angle A$, $\angle B$, $\angle C$ 所对的边长分别为 a, b, c, 设 a, b, c 满足条件 $b^2+c^2-bc=a^2$ 和 $\dfrac{c}{b}=\dfrac{1}{2}+\sqrt{3}$, 求 $\angle A$ 和 $\tan B$ 的值.

18. 已知 $u_n=a^n+a^{n-1}b+a^{n-2}b^2+\cdots+ab^{n-1}+b^n$ $(n\in\mathbf{N}^*,\ a>0,\ b>0)$.

    (1) 当 $a=b$ 时, 求数列 $\{u_n\}$ 的前 n 项和 S_n;

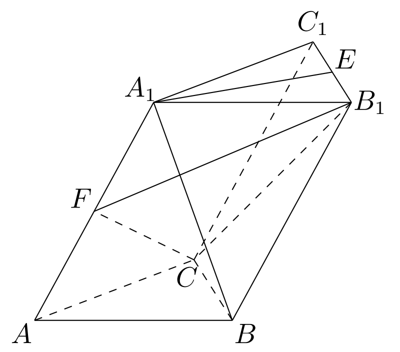
    (2) 求 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{u_n}{u_{n-1}}$.

19. 如图, 在斜三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中, $\angle A_1AB=\angle A_1AC$, $AB=AC$, $A_1A=A_1B=a$, 侧面 B_1BCC_1 与底面 ABC 所成的二面角为 120°, E、F 分别是棱 B_1C_1, A_1A 的中点.

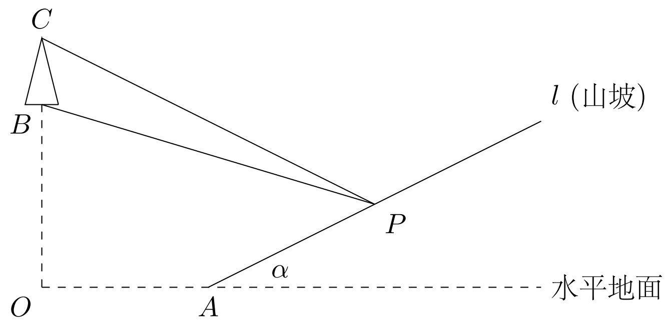
(1) 求 A_1A 与底面 ABC 所成的角;

(2) 证明 $A_1E\mathbin{/\mkern-5mu/}$ 平面 B_1FC;

(3) 求经过 A_1, A, B, C 四点的球的体积.



20. 某人在一山坡 P 处观看对面山项上的一座铁塔, 如图所示, 塔高 $BC=80$ (米), 塔所在的山高 $OB=220$ (米), $OA=200$ (米), 图中所示的山坡可视为直线 l 且点 P 在直线 l 上, l 与水平地面的夹角为 α, $\tan\alpha=\dfrac{1}{2}$. 试问此人距水平地面多高时, 观看塔的视角 $\angle BPC$ 最大? (不计此人的身高)



21. 抛物线 C 的方程为 $y=ax^2$ $(a<0)$, 过抛物线 C 上一点 $P(x_0,y_0)$ $(x_0\neq 0)$ 作斜率为 k_1, k_2 的两条直线分别交抛物线 C 于 $A(x_1,y_1)$, $B(x_2,y_2)$ 两点 (P, A, B 三点互不相同), 且满足 $k_2+\lambda k_1=0$ $(\lambda\neq 0,\ \lambda\neq -1)$.

(1) 求抛物线 C 的焦点坐标和准线方程;

(2) 设直线 AB 上一点 M, 满足 $\overrightarrow{BM}=\lambda\overrightarrow{MA}$, 证明线段 PM 的中点在 y 轴上;

(3) 当 $\lambda=1$ 时, 若点 P 的坐标为 $(1,-1)$, 求 $\angle PAB$ 为钝角时点 A 的纵坐标 y_1 的取值范围.

22. 设函数 $f(x)=x\sin x$ $(x\in\mathbf{R})$.

(1) 证明 $f(x+2k\pi)-f(x)=2k\pi\sin x$, 其中 k 为整数;

(2) 设 x_0 为 $f(x)$ 的一个极值点, 证明 $[f(x_0)]^2=\dfrac{{x_0}^4}{1+{x_0}^2}$;

(3) 设 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 内的全部极值点按从小到大的顺序排列 a_1, a_2, $\cdots$, a_n, $\cdots$, 证明 $\dfrac{\pi}{2}<a_{n+1}-a_n<\pi$ $(n=1,\ 2,\ \cdots)$.