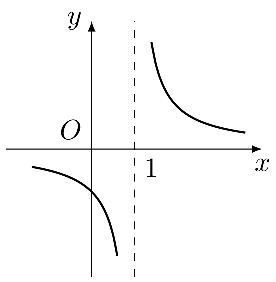
2005 普通高等学校招生考试 (山东卷理)

一、选择题

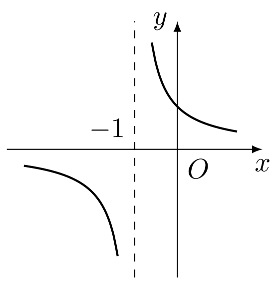
1. $\dfrac{1-\mathrm{i}}{(1+\mathrm{i})^2}+\dfrac{1+\mathrm{i}}{(1-\mathrm{i})^2}=$ ( )

(A) i (B) $-$i (C) 1 (D) -1

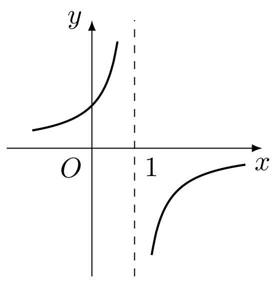
2. 函数 $y=\dfrac{1-x}{x}$ $(x\neq 0)$ 的反函数图象大致是 ( )



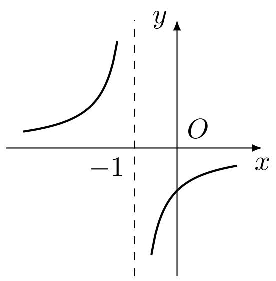
(A)



(B)



(C)



(D)

3. 已知函数 $y=\sin\left(x-\dfrac{\pi}{12}\right)\cos\left(x-\dfrac{\pi}{12}\right)$, 则下列判断正确的是 ( )

(A) 此函数的最小周期为 2π, 其图象的一个对称中心是 $\left(\dfrac{\pi}{12},0\right)$

(B) 此函数的最小周期为 π, 其图象的一个对称中心是 $\left(\dfrac{\pi}{12},0\right)$

(C) 此函数的最小周期为 2π, 其图象的一个对称中心是 $\left(\dfrac{\pi}{6},0\right)$

(D) 此函数的最小周期为 π, 其图象的一个对称中心是 $\left(\dfrac{\pi}{6},0\right)$

4. 下列函数既是奇函数, 又在区间 $[-1,1]$ 上单调递减的是 ( )

(A) $f(x)=\sin x$ (B) $f(x)=-|x+1|$

(C) $f(x)=\dfrac{1}{2}\left(a^x+a^{-x}\right)$ (D) $f(x)=\ln\dfrac{2-x}{2+x}$

5. 如果 $\left(3x-\dfrac{1}{\sqrt[3]{x^2}}\right)^n$ 的展开式中各项系数之和为 128, 则展开式中 $\dfrac{1}{x^3}$ 的系数是 ( )

(A) 7 (B) -7 (C) 21 (D) -21

6. 函数 $f(x)=\begin{cases}\sin(\pi x^2), & -1<x<0,\\ \mathrm{e}^{x-1}, & x\geqslant 0.\end{cases}$ 若 $f(1)+f(a)=2$, 则 a 的所有可能值为 ( )

(A) 1 (B) $-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ (C) $1,-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ (D) $1,\ \dfrac{\sqrt{2}}{2}$

7. 已知向量 $\vec{a}$, $\vec{b}$, 且 $\overrightarrow{AB}=\vec{a}+2\vec{b}$, $\overrightarrow{BC}=-5\vec{a}+6\vec{b}$, $\overrightarrow{CD}=7\vec{a}-2\vec{b}$, 则一定共线的三点是 ( )

(A) A、B、D (B) A、B、C (C) B、C、D (D) A、C、D

8. 设地球的半径为 R, 若甲地位于北纬 45° 东经 120°, 乙地位于南纬 75° 东经 120°, 则甲、乙两地的球面距离为 ( )

(A) $\sqrt{3}R$ (B) $\dfrac{\pi}{6}R$ (C) $\dfrac{5\pi}{6}R$ (D) $\dfrac{2\pi}{3}R$

9. 10 张奖券中只有 3 张有奖, 5 个人购买, 每人 1 张, 至少有 1 人中奖的概率是 ( )

(A) $\dfrac{3}{10}$ (B) $\dfrac{1}{12}$ (C) $\dfrac{1}{2}$ (D) $\dfrac{11}{12}$

10. 设集合 A、B 是全集 U 的两个子集, 则 $A\subsetneqq B$ 是 $(\complement_U A)\cup B=U$ 的( )

(A) 充分不必要条件 (B) 必要不充分条件

(C) 充要条件 (D) 既不充分也不必要条件

11. $0<a<1$, 下列不等式一定成立的是 ( )

(A) $|\log_{(1+a)}(1-a)|+|\log_{(1-a)}(1+a)|>2$

(B) $|\log_{(1+a)}(1-a)|<|\log_{(1-a)}(1+a)|$

(C) $|\log_{(1+a)}(1-a)+\log_{(1-a)}(1+a)|<|\log_{(1+a)}(1-a)|+|\log_{(1-a)}(1+a)|$

(D) $|\log_{(1+a)}(1-a)-\log_{(1-a)}(1+a)|<|\log_{(1+a)}(1-a)|-|\log_{(1-a)}(1+a)|$

12. 设直线 l: $2x+y+2=0$ 关于原点对称的直线为 l', 若 l' 与椭圆 $x^2+\dfrac{y^2}{4}=1$ 的交点为 A、B, 点 P 为椭圆上的动点, 则使 $\triangle PAB$ 的面积为 $\dfrac{1}{2}$ 的点 P 的个数为 ( )

(A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 4

二、填空题

13. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\mathrm{C}_n^2+2\mathrm{C}_n^{n-2}}{(n+1)^2}=$______.

14. 设双曲线 $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$ $(a>0,\ b>0)$ 的右焦点为 F, 右准线 l 与两条渐近线交于 P、Q 两点, 如果 $\triangle PQF$ 是直角三角形, 则双曲线的离心率 $e=$______.

15. 设 x、y 满足约束条件 $\begin{cases}x+y\leqslant 5,\\ 3x+2y\leqslant 12,\\ 0\leqslant x\leqslant 3,\\ 0\leqslant y\leqslant 4,\end{cases}$ 则使得目标函数 $z=6x+5y$ 的最大的点 (x,y) 是______.

16. 已知 m、n 是不同的直线, α、β 是不重合的平面, 给出下列命题:

① 若 $\alpha\parallel\beta$, $m\subset\alpha$, $n\subset\beta$, 则 $m\parallel n$;

② 若 $m,n\subset\alpha$, $m\parallel\beta$, $n\parallel\beta$, 则 $\alpha\parallel\beta$;

③ 若 $m\perp\alpha$, $n\perp\beta$, $m\parallel n$, 则 $\alpha\parallel\beta$;

④ m,n 是两条异面直线, 若 $m\parallel\alpha$, $m\parallel\beta$, $n\parallel\alpha$, $n\parallel\beta$, 则 $\alpha\parallel\beta$.

上面的命题中, 真命题的序号是______. (写出所有真命题的序号)

三、解答题

17. 已知向量 $\vec{m}=(\cos\theta,\sin\theta)$ 和 $\vec{n}=\left(\sqrt{2}-\sin\theta,\cos\theta\right)$, $\theta\in(\pi,2\pi)$, 且 $|\vec{m}+\vec{n}|=\dfrac{8\sqrt{2}}{5}$, 求 $\cos\left(\dfrac{\theta}{2}+\dfrac{\pi}{8}\right)$ 的值.

18. 袋中装有黑球和白球共 7 个, 从中任取 2 个球都是白球的概率为 $\dfrac{1}{7}$, 现有甲、乙两人从袋中轮流摸取 1 球, 甲先取, 乙后取, 然后甲再取 $\cdots$, 取后不放回, 直到两人中有一人取到白球时既终止. 每个球在每一次被取出的机会是等可能的, 用 ξ 表示取球终止所需要的取球次数.

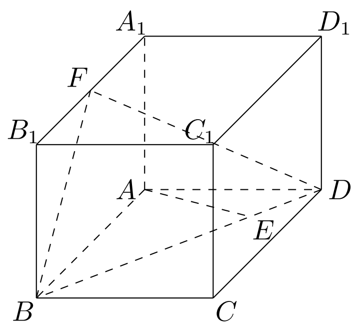
(1) 求袋中所有的白球的个数;

(2) 求随机变量 ξ 的概率分布;

(3) 求甲取到白球的概率.

19. 已知 $x=1$ 是函数 $f(x)=mx^3-3(m+1)x^2+nx+1$ 的一个极值点, 其中 $m, n\in\mathbf{R}$, $m<0$.
(1) 求 m 与 n 的关系式;
(2) 求 $f(x)$ 的单调区间;
(3) 当 $x\in[-1,1]$ 时, 函数 $y=f(x)$ 的图象上任意一点的切线斜率恒大于 $3m$, 求 m 的取值范围.

20. 如图, 已知长方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$, $AB=2$, $AA_1=1$, 直线 BD 与平面 AA_1B_1B 所成的角为 $30°$, AE 垂直 BD 于 E, F 为 A_1B_1 的中点.
(1) 求异面直线 AE 与 BF 所成的角;
(2) 求平面 BDF 与平面 AA_1B 所成的二面角 (锐角) 的大小;
(3) 求点 A 到平面 BDF 的距离.



21. 已知数列 $\{a_n\}$ 的首项 $a_1=5$, 前 n 项和为 S_n, 且 $S_{n+1}=2S_n+n+5$ ($n\in\mathbf{N}^*$).
(1) 证明数列 $\{a_n+1\}$ 是等比数列;
(2) 令 $f(x)=a_1x+a_2x^2+\cdots+a_nx^n$, 求函数 $f(x)$ 在点 $x=1$ 处的导数 $f'(1)$ 并比较 $2f'(1)$ 与 $23n^2-13n$ 的大小.

22. 已知动圆过定点 $\left(\frac{p}{2},0\right)$, 且与直线 $x=-\frac{p}{2}$ 相切, 其中 $p>0$.
(1) 求动圆圆心 C 的轨迹的方程;
(2) 设 A、B 是轨迹 C 上异于原点 O 的两个不同点, 直线 OA 和 OB 的倾斜角分别为 α 和 β, 当 α, β 变化且 $\alpha+\beta$ 为定值 θ $(0<\theta<\pi)$ 时, 证明直线 AB 恒过定点, 并求出该定点的坐标.