# 2005 普通高等学校招生考试 (湖南卷理)

## 一、选择题

1. 复数 $z=\mathrm{i}+\mathrm{i}^2+\mathrm{i}^3+\mathrm{i}^4$ 的值是 ( )

(A) $-1$　(B) 0　(C) 1　(D) i

2. 函数 $f(x)=\sqrt{1-2^x}$ 的定义域是 ( )

(A) $(-\infty,0]$　(B) $[0,+\infty)$　(C) $(-\infty,0)$　(D) $(-\infty,+\infty)$

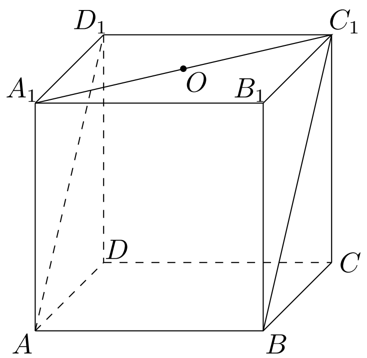
3. 已知数列 $\{\log_2(a_n-1)\}$ $(n\in\mathbf{N}^*)$ 为等差数列, 且 $a_1=3$, $a_2=5$, 则 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{a_2-a_1}+\dfrac{1}{a_3-a_2}+\cdots+\dfrac{1}{a_{n+1}-a_n}\right)=$ ( )

(A) 2　(B) $\dfrac{3}{2}$　(C) 1　(D) $\dfrac{1}{2}$

4. 已知点 $P(x,y)$ 在不等式组 $\begin{cases}x-2\leqslant 0,\\ y-1\leqslant 0,\\ x+2y-2\geqslant 0\end{cases}$ 表示的平面区域上运动, 则 $z=x-y$ 的取值范围是 ( )

(A) $[-2,-1]$　(B) $[-2,1]$　(C) $[-1,2]$　(D) $[1,2]$

5. 如图, 正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的棱长为 1, $O$ 是底面 $A_1B_1C_1D_1$ 的中心, 则 $O$ 到平面 $ABC_1D_1$ 的距离为 ( )




(A) $\dfrac{1}{2}$　(B) $\dfrac{\sqrt{2}}{4}$　(C) $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$　(D) $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

6. 设 $f_0(x)=\sin x$, $f_1(x)=f_0'(x)$, $f_2(x)=f_1'(x)$, $\cdots$, $f_{n+1}(x)=f_n'(x)$, $n\in\mathbf{N}$, 则 $f_{2005}(x)=$ ( )

(A) $\sin x$　(B) $-\sin x$　(C) $\cos x$　(D) $-\cos x$

7. 已知双曲线 $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$ $(a>0,\ b>0)$ 的右焦点为 $F$, 右准线与一条渐近线交于点 $A$, $\triangle OAF$ 的面积为 $\dfrac{a^2}{2}$ ($O$ 为原点), 则两条渐近线的夹角为( )

(A) $30^\circ$　(B) $45^\circ$　(C) $60^\circ$　(D) $90^\circ$

8. 集合 $A=\left\{x\,\middle|\,\dfrac{x-1}{x+1}<0\right\}$, $B=\{x\mid |x-b|<a\}$, 若"$a=1$"是"$A\cap B\neq\varnothing$"的充分条件, 则 $b$ 的取值范围是 ( )

(A) $-2\leqslant b<0$　(B) $0<b\leqslant 2$　(C) $-3<b<-1$　(D) $-1\leqslant b<2$

9. 4 位同学参加某种形式的竞赛, 竞赛规则规定: 每位同学必须从甲. 乙两道题中任选一题作答, 选甲题答对得 100 分, 答错得 $-100$ 分; 选乙题答对得 90 分, 答错得 $-90$ 分. 若 4 位同学的总分为 0, 则这 4 位同学不同得分情况的种数是 ( )

(A) 48　(B) 36　(C) 24　(D) 18

10. 设 $P$ 是 $\triangle ABC$ 内任意一点, $S_{\triangle ABC}$ 表示 $\triangle ABC$ 的面积, $\lambda_1=\dfrac{S_{\triangle PBC}}{S_{\triangle ABc}}$, $\lambda_2=\dfrac{S_{\triangle PCA}}{S_{\triangle ABC}}$, $\lambda_3=\dfrac{S_{\triangle PAB}}{S_{\triangle ABC}}$, 定义 $f(P)=(\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3)$, 若 $G$ 是 $\triangle ABC$ 的重心, $f(Q)=\left(\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{3},\dfrac{1}{6}\right)$, 则 ( )

(A) 点 $Q$ 在 $\triangle GAB$ 内　(B) 点 $Q$ 在 $\triangle GBC$ 内

(C) 点 $Q$ 在 $\triangle GCA$ 内　(D) 点 $Q$ 与点 $G$ 重合

## 二、填空题

11. 一工厂生产了某种产品 16800 件, 它们来自甲、乙、丙 3 条生产线, 为检查这批产品的质量, 决定采用分层抽样的方法进行抽样, 已知甲、乙、丙三条生产线抽取的个体数组成一个等差数列, 则乙生产线生产了______件产品.

12. 在 $(1+x)+(1+x)^2+\cdots+(1+x)^6$ 的展开式中, $x^2$ 项的系数是______. (用数字作答)

13. 已知直线 $ax+by+c=0$ 与圆 $O: x^2+y^2=1$ 相交于 $A$、$B$ 两点, 且 $|AB|=\sqrt{3}$, 则 $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=$______.

14. 设函数 $f(x)$ 的图象关于点 $(1,2)$ 对称, 且存在反函数 $f^{-1}(x)$, $f(4)=0$, 则 $f^{-1}(4)=$______.

15. 设函数 $f(x)$ 的图象与直线 $x=a$, $x=b$ 及 $x$ 轴所围成图形的面积称为函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上的面积, 已知函数 $y=\sin nx$ 在 $\left[0,\dfrac{\pi}{n}\right]$ 上的面积为 $\dfrac{2}{n}$ $(n\in\mathbf{N}^*)$.

(1) $y=\sin 3x$ 在 $\left[0,\dfrac{2\pi}{3}\right]$ 上的面积为______;

(2) $y=\sin(3x-\pi)+1$ 在 $\left[\dfrac{\pi}{3},\dfrac{4\pi}{3}\right]$ 上的面积为______.

## 三、解答题

16. 已知在 $\triangle ABC$ 中, $\sin A(\sin B+\cos B)-\sin C=0$, $\sin B+\cos 2C=0$, 求角 $A$、$B$、$C$ 的大小.

17. 如图 1, 已知 $ABCD$ 是上、下底边长分别为 2 和 6, 高为 $\sqrt{3}$ 的等腰梯形, 将它沿对称轴 $OO_1$ 折成直二面角, 如图 2.

(1) 证明: $AC\perp BO_1$;

(2) 求二面角 $O-AC-O_1$ 的大小.

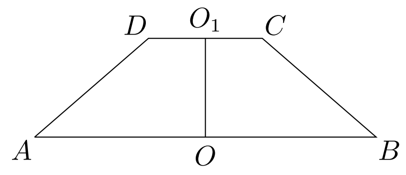



图 1

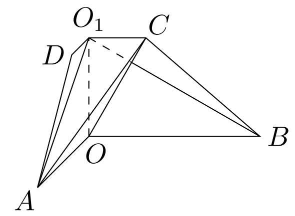



图 2

18. 某城市有甲、乙、丙 3 个旅游景点, 一位客人游览这三个景点的概率分别是 0.4, 0.5, 0.6, 且客人是否游览哪个景点互不影响, 设 $\xi$ 表示客人离开该城市时游览的景点数与没有游览的景点数之差的绝对值.

(1) 求 $\xi$ 的分布及数学期望;

(2) 记"函数 $f(x)=x^2-3\xi x+1$ 在区间 $[2,+\infty)$ 上单调递增"为事件 $A$, 求事件 $A$ 的概率.

19. 已知椭圆 $C$: $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ $(a>b>0)$ 的左、右焦点为 $F_1$、$F_2$, 离心率为 $e$. 直线 $l$: $y=ex+a$ 与 $x$ 轴、$y$ 轴分别交于点 $A$、$B$, $M$ 是直线 $l$ 与椭圆 $C$ 的一个公共点, $P$ 是点 $F_1$ 关于直线 $l$ 的对称点, 设 $\overrightarrow{AM}=\lambda\overrightarrow{AB}$.
(1) 证明: $\lambda=1-e^2$;
(2) 确定 $\lambda$ 的值, 使得 $\triangle PF_1F_2$ 是等腰三角形.

20. 自然状态下的鱼类是一种可再生资源, 为持续利用这一资源, 需从宏观上考察其再生能力及捕捞强度对鱼群总量的影响. 用 $x_n$ 表示某鱼群在第 $n$ 年年初的总量, $n\in\mathbf{N}^*$, 且 $x_1>0$. 不考虑其它因素, 设在第 $n$ 年内鱼群的繁殖量及捕捞量都与 $x_n$ 成正比, 死亡量与 $x_n^2$ 成正比, 这些比例系数依次为正常数 $a$, $b$, $c$.
(1) 求 $x_{n+1}$ 与 $x_n$ 的关系式;
(2) 猜测: 当且仅当 $x_1$, $a$, $b$, $c$ 满足什么条件时, 每年年初鱼群的总量保持不变? (不要求证明)
(3) 设 $a=2$, $b=1$, 为保证对任意 $x_1\in(0,2)$, 都有 $x_n>0$, $n\in\mathbf{N}^*$, 则捕捞强度 $b$ 的最大允许值是多少? 证明你的结论.

21. 已知函数 $f(x)=\ln x$, $g(x)=\dfrac{1}{2}ax^2+bx$, $a\neq 0$.
(1) 若 $b=2$, 且 $h(x)=f(x)-g(x)$ 存在单调递减区间, 求 $a$ 的取值范围;
(2) 设函数 $f(x)$ 的图象 $C_1$ 与函数 $g(x)$ 图象 $C_2$ 交于点 $P$、$Q$, 过线段 $PQ$ 的中点作 $x$ 轴的垂线分别交 $C_1$, $C_2$ 于点 $M$、$N$, 证明 $C_1$ 在点 $M$ 处的切线与 $C_2$ 在点 $N$ 处的切线不平行.