

2005 普通高等学校招生考试 (重庆卷理)

一、选择题

1. 圆 $(x+2)^2 + y^2 = 5$ 关于原点 $(0,0)$ 对称的圆的方程为 ()
 (A) $(x-2)^2 + y^2 = 5$ (B) $x^2 + (y-2)^2 = 5$
 (C) $(x+2)^2 + (y+2)^2 = 5$ (D) $x^2 + (y+2)^2 = 5$
2. $\left(\frac{1+i}{1-i}\right)^{2005} =$ ()
 (A) i (B) $-i$ (C) 2^{2005} (D) -2^{2005}
3. 若函数 $f(x)$ 是定义在 \mathbf{R} 上的偶函数, 在 $(-\infty, 0]$ 上是减函数, 且 $f(2) = 0$, 则使得 $f(x) < 0$ 的 x 的取值范围是 ()
 (A) $(-\infty, 2)$ (B) $(2, +\infty)$
 (C) $(-\infty, -2) \cup (2, +\infty)$ (D) $(-2, 2)$
4. 已知 $A(3,1), B(6,1), C(4,3), D$ 为线段 BC 的中点, 则向量 \overrightarrow{AC} 与 \overrightarrow{DA} 的夹角为 ()
 (A) $\frac{\pi}{2} - \arccos \frac{4}{5}$ (B) $\arccos \frac{4}{5}$
 (C) $\arccos \left(-\frac{4}{5}\right)$ (D) $-\arccos \left(-\frac{4}{5}\right)$
5. 若 x, y 是正数, 则 $\left(x + \frac{1}{2y}\right)^2 + \left(y + \frac{1}{2x}\right)^2$ 的最小值是 ()
 (A) 3 (B) $\frac{7}{2}$ (C) 4 (D) $\frac{9}{2}$
6. 已知 α, β 均为锐角, 若 $p: \sin \alpha < \sin(\alpha + \beta), q: \alpha + \beta < \frac{\pi}{2}$, 则 p 是 q 的 ()
 (A) 充分而不必要条件 (B) 必要而不充分条件
 (C) 充要条件 (D) 既不充分也不必要条件
7. 对于不重合的两个平面 α 与 β , 给定下列条件:
 ① 存在平面 γ , 使得 α, β 都垂直于 γ ;
 ② 存在平面 γ , 使得 α, β 都平行于 γ ;
 ③ α 内有不共线的三点到 β 的距离相等;
 ④ 存在异面直线 l, m , 使得 $l \parallel \alpha, l \parallel \beta, m \parallel \alpha, m \parallel \beta$.
 其中, 可以判定 α 与 β 平行的条件有 ()
 (A) 1 个 (B) 2 个 (C) 3 个 (D) 4 个
8. 若 $\left(2x - \frac{1}{x}\right)^n$ 展开式中含 $\frac{1}{x^2}$ 项的系数与含 $\frac{1}{x^4}$ 项的系数之比为 -5 , 则 n 等于 ()
 (A) 4 (B) 6 (C) 8 (D) 10

9. 若动点 (x, y) 在曲线 $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (b > 0)$ 上变化, 则 $x^2 + 2y$ 的最大值为 ()

- (A) $\begin{cases} \frac{b^2}{4} + 4, & 0 < b < 4, \\ 2b, & b \geq 4. \end{cases}$ (B) $\begin{cases} \frac{b^2}{4} + 4, & 0 < b < 2, \\ 2b, & b \geq 2. \end{cases}$
- (C) $\frac{b^2}{4} + 4$ (D) $2b$

10. 在体积为 1 的三棱锥 $A-BCD$ 侧棱 AB, AC, AD 上分别取点 E, F, G , 使 $AE:EB = AF:FC = AG:GD = 2:1$, 记 O 为三平面 BCG, CDE, DBF 的交点, 则三棱锥 $O-BCD$ 的体积等于 ()

- (A) $\frac{1}{9}$ (B) $\frac{1}{8}$ (C) $\frac{1}{7}$ (D) $\frac{1}{4}$

二、填空题

11. 已知集合 $A = \{x \in \mathbf{R} \mid x^2 - x - 6 < 0\}$, 集合 $B = \{x \in \mathbf{R} \mid |x - 2| < 2\}$, 则 $A \cap B =$ _____.
12. 曲线 $y = x^3$ 在点 $(a, a^3) (a \neq 0)$ 处的切线与 x 轴、直线 $x = a$ 所围成的三角形的面积为 $\frac{1}{6}$, 则 $a =$ _____.
13. 已知 α, β 均为锐角, 且 $\cos(\alpha + \beta) = \sin(\alpha - \beta)$, 则 $\tan \alpha =$ _____.
14. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^{3n} - 3^{2n+1}}{2^{3n} + 3^{2n}} =$ _____.
15. 某轻轨列车有 4 节车厢, 现有 6 位乘客准备乘坐, 设每一位乘客进入每节车厢是等可能的, 则这 6 位乘客进入各节车厢的人数恰好为 0, 1, 2, 3 的概率为_____.
16. 连接抛物线上任意四点组成的四边形可能是_____. (填写所有正确选项的序号)
 ① 菱形; ② 有 3 条边相等的四边形; ③ 梯形; ④ 平行四边形; ⑤ 有一组对角相等的四边形.

18. 在一次购物抽奖活动中, 假设某 10 张券中有一等奖券 1 张, 可获价值 50 元的奖品; 有二等奖券 3 张, 每张可获价值 10 元的奖品; 其余 6 张没有奖, 某顾客从此 10 张券中任抽 2 张, 求:

- (1) 该顾客中奖的概率;
- (2) 该顾客获得的奖品总价值 ξ (元) 的概率分布列和期望 $E\xi$.

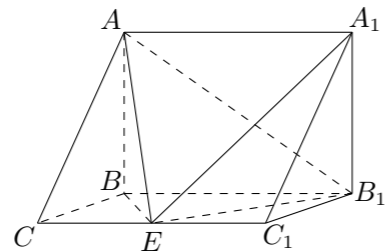
19. 已知 $a \in \mathbf{R}$, 讨论函数 $f(x) = e^x(x^2 + ax + a + 1)$ 的极值点的个数.

三、解答题

17. 若函数 $f(x) = \frac{1 + \cos 2x}{4 \sin \left(\frac{\pi}{2} + x\right)} - a \sin \frac{x}{2} \cos \left(\pi - \frac{x}{2}\right)$ 的最大值为 2, 试确定常数 a 的值.

20. 如图, 在三棱柱 $ABC - A_1B_1C_1$ 中, $AB \perp$ 侧面 BB_1C_1C , E 为棱 CC_1 上异于 C, C_1 的一点, $EA \perp EB_1$, 已知 $AB = \sqrt{2}$, $BB_1 = 2$, $BC = 1$, $\angle BCC_1 = \frac{\pi}{3}$, 求:

- (1) 异面直线 AB 与 EB_1 的距离;
- (2) 二面角 $A - EB_1 - A_1$ 的平面角的正切值.



21. 已知椭圆 C_1 的方程为 $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$, 双曲线 C_2 的左、右焦点分别为 C_1 的左、右顶点, 而 C_2 的左、右顶点分别是 C_1 的左、右焦点.
- (1) 求双曲线 C_2 的方程;
 - (2) 若直线 $l: y = kx + \sqrt{2}$ 与椭圆 C_1 及双曲线 C_2 都恒有两个不同的交点, 且 l 与 C_2 的两个交点 A 和 B 满足 $\vec{OA} \cdot \vec{OB} < 6$ (其中 O 为原点), 求 k 的取值范围.

22. 数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1 = 1$ 且 $a_{n+1} = \left(1 + \frac{1}{n^2 + n}\right) a_n + \frac{1}{2^n}$ ($n \geq 1$).

- (1) 用数学归纳法证明: $a_n \geq 2$ ($n \geq 2$);
- (2) 已知不等式 $\ln(1+x) < x$ 对 $x > 0$ 成立, 证明: $a_n < e^2$ ($n \geq 1$), 其中无理数 $e = 2.71828 \dots$.