

## 2006 普通高等学校招生考试 (全国卷 I 理)

### 一、选择题

1. 设集合  $M = \{x \mid x^2 - x < 0\}$ ,  $N = \{x \mid |x| < 2\}$ , 则 ( )  
 (A)  $M \cap N = \emptyset$  (B)  $M \cap N = M$  (C)  $M \cup N = M$  (D)  $M \cup N = \mathbf{R}$
2. 已知函数  $y = e^x$  的图象与函数  $y = f(x)$  的图象关于直线  $y = x$  对称, 则 ( )  
 (A)  $f(2x) = e^{2x} (x \in \mathbf{R})$  (B)  $f(2x) = \ln 2 \cdot \ln x (x > 0)$   
 (C)  $f(2x) = 2e^x (x \in \mathbf{R})$  (D)  $f(2x) = \ln x + \ln 2 (x > 0)$
3. 双曲线  $mx^2 + y^2 = 1$  的虚轴长是实轴长的 2 倍, 则  $m =$  ( )  
 (A)  $-\frac{1}{4}$  (B)  $-4$  (C)  $4$  (D)  $\frac{1}{4}$
4. 如果复数  $(m^2 + i)(1 + mi)$  是实数, 则实数  $m =$  ( )  
 (A)  $1$  (B)  $-1$  (C)  $\sqrt{2}$  (D)  $-\sqrt{2}$
5. 函数  $f(x) = \tan\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$  的单调增区间为 ( )  
 (A)  $\left(k\pi - \frac{\pi}{2}, k\pi + \frac{\pi}{2}\right), k \in \mathbf{Z}$  (B)  $(k\pi, (k+1)\pi), k \in \mathbf{Z}$   
 (C)  $\left(k\pi - \frac{3\pi}{4}, k\pi + \frac{\pi}{4}\right), k \in \mathbf{Z}$  (D)  $\left(k\pi - \frac{\pi}{4}, k\pi + \frac{3\pi}{4}\right), k \in \mathbf{Z}$
6.  $\triangle ABC$  的内角  $A, B, C$  的对边分别为  $a, b, c$ , 若  $a, b, c$  成等比数列, 且  $c = 2a$ , 则  $\cos B =$  ( )  
 (A)  $\frac{1}{4}$  (B)  $\frac{3}{4}$  (C)  $\frac{\sqrt{2}}{4}$  (D)  $\frac{\sqrt{2}}{3}$
7. 已知各顶点都在一个球面上的正四棱柱高为 4, 体积为 16, 则这个球的表面积是 ( )  
 (A)  $16\pi$  (B)  $20\pi$  (C)  $24\pi$  (D)  $32\pi$
8. 抛物线  $y = -x^2$  上的点到直线  $4x + 3y - 8 = 0$  距离的最小值是 ( )  
 (A)  $\frac{4}{3}$  (B)  $\frac{7}{5}$  (C)  $\frac{8}{5}$  (D)  $3$
9. 设平面向量  $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3$  的和  $\mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_2 + \mathbf{a}_3 = \mathbf{0}$ . 如果向量  $\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3$  满足  $|\mathbf{b}_i| = 2|\mathbf{a}_i|$ , 且  $\mathbf{a}_i$  顺时针旋转  $30^\circ$  后与  $\mathbf{b}_i$  同向, 其中  $i = 1, 2, 3$ , 则 ( )  
 (A)  $-\mathbf{b}_1 + \mathbf{b}_2 + \mathbf{b}_3 = \mathbf{0}$  (B)  $\mathbf{b}_1 - \mathbf{b}_2 + \mathbf{b}_3 = \mathbf{0}$   
 (C)  $\mathbf{b}_1 + \mathbf{b}_2 - \mathbf{b}_3 = \mathbf{0}$  (D)  $\mathbf{b}_1 + \mathbf{b}_2 + \mathbf{b}_3 = \mathbf{0}$
10. 设  $a_n$  是公差为正数的等差数列, 若  $a_1 + a_2 + a_3 = 15$ ,  $a_1 a_2 a_3 = 80$ , 则  $a_{11} + a_{12} + a_{13} =$  ( )  
 (A)  $120$  (B)  $105$  (C)  $90$  (D)  $75$
11. 用长度分别为 2, 3, 4, 5, 6 (单位: cm) 的 5 根细木棒围成一个三角形 (允许连接, 但不允许折断), 能够得到的三角形的最大面积为 ( )  
 (A)  $8\sqrt{5} \text{ cm}^2$  (B)  $6\sqrt{10} \text{ cm}^2$  (C)  $3\sqrt{55} \text{ cm}^2$  (D)  $20 \text{ cm}^2$

12. 设集合  $I = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ . 选择  $I$  的两个非空子集  $A$  和  $B$ , 要使  $B$  中最小的数大于  $A$  中最大的数, 则不同的选择方法共有 ( )  
 (A) 50 种 (B) 49 种 (C) 48 种 (D) 47 种

### 二、填空题

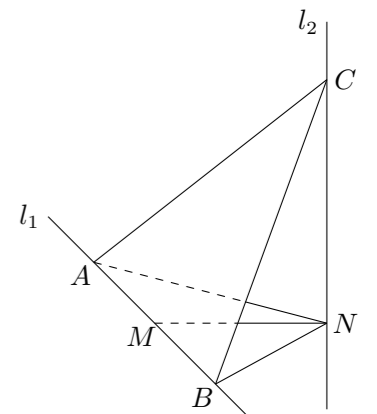
13. 已知正四棱锥的体积为 12, 底面对角线长为  $2\sqrt{6}$ , 则侧面与底面所成的二面角等于\_\_\_\_\_.
14. 设  $z = 2y - x$ , 式中变量  $x, y$  满足下列条件: 
$$\begin{cases} 2x - y \geq -1, \\ 3x + 2y \leq 23, \\ y \geq 1, \end{cases}$$
 则  $z$  的最大值为\_\_\_\_\_.
15. 安排 7 位工作人员在 5 月 1 日至 5 月 7 日值班, 每人值班一天, 其中甲、乙二人都不安排在 5 月 1 日和 2 日, 不同的安排方法共有\_\_\_\_\_种. (用数字作答)
16. 函数  $f(x) = \cos(\sqrt{3}x + \varphi)$  ( $0 < \varphi < \pi$ ). 若  $f(x) + f'(x)$  是奇函数, 则  $\varphi =$ \_\_\_\_\_.

### 三、解答题

17.  $\triangle ABC$  的三个内角为  $A, B, C$ , 求当  $A$  为何值时,  $\cos A + 2\cos \frac{B+C}{2}$  取得最大值, 并求出这个最大值.

18.  $A, B$  是治疗同一种疾病的两种药, 用若干试验组进行对比试验. 每个试验组由 4 只小白鼠组成, 其中 2 只服用  $A$ , 另 2 只服用  $B$ , 然后观察疗效. 若在一个试验组中, 服用  $A$  有效的小白鼠的只数比服用  $B$  有效的多, 就称该试验组为甲类组. 设每只小白鼠服用  $A$  有效的概率为  $\frac{2}{3}$ , 服用  $B$  有效的概率为  $\frac{1}{2}$ .  
 (1) 求一个试验组为甲类组的概率;  
 (2) 观察 3 个试验组, 用  $\xi$  表示这 3 个试验组中甲类组的个数, 求  $\xi$  的分布列和数学期望.

19. 如图,  $l_1, l_2$  是互相垂直的异面直线,  $MN$  是它们的公垂线段. 点  $A, B$  在  $l_1$  上,  $C$  在  $l_2$  上,  $AM = MB = MN$ .  
 (1) 证明:  $AC \perp NB$ ;  
 (2) 若  $\angle ACB = 60^\circ$ , 求  $NB$  与平面  $ABC$  所成角的余弦值.



20. 在平面直角坐标系  $xOy$  中, 有一个以  $F_1(0, -\sqrt{3})$  和  $F_2(0, \sqrt{3})$  为焦点, 离心率为  $\frac{\sqrt{3}}{2}$  的椭圆, 设椭圆在第一象限的部分为曲线  $C$ , 动点  $P$  在  $C$  上,  $C$  在点  $P$  处的切线与  $x, y$  轴的交点分别为  $A, B$ , 且向量  $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}$ . 求:
- (1) 点  $M$  的轨迹方程;
  - (2)  $|\overrightarrow{OM}|$  的最小值.

21. 已知函数  $f(x) = \frac{1+x}{1-x}e^{-ax}$ .
- (1) 设  $a > 0$ , 讨论  $y = f(x)$  的单调性;
  - (2) 若对任意  $x \in (0, 1)$  恒有  $f(x) > 1$ , 求  $a$  的取值范围.

22. 设数列  $a_n$  的前  $n$  项的和  $S_n = \frac{4}{3}a_n - \frac{1}{3} \times 2^{n+1} + \frac{2}{3}$ ,  $n = 1, 2, 3, \dots$ .
- (1) 求首项  $a_1$  与通项  $a_n$ ;
  - (2) 设  $T_n = \frac{2^n}{S_n}$ ,  $n = 1, 2, 3, \dots$ , 证明:  $\sum_{i=1}^n T_i < \frac{3}{2}$ .