2006 普通高等学校招生考试 (天津卷理)

一、选择题

1. i 是虚数单位, $\dfrac{\mathrm{i}}{1+\mathrm{i}}=$ ( )

(A) $\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\mathrm{i}$ (B) $-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\mathrm{i}$ (C) $\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\mathrm{i}$ (D) $-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\mathrm{i}$

2. 如果双曲线的两个焦点分别为 $F_1(-3,0)$、$F_2(3,0)$, 一条渐近线方程为 $y=\sqrt{2}x$, 那么它的两条渐近线间的距离是 ( )

(A) $6\sqrt{3}$ (B) 4 (C) 2 (D) 1

3. 设变量 x、y 满足约束条件 $\begin{cases} y\leqslant x, \\ x+y\geqslant 2, \\ y\geqslant 3x-6, \end{cases}$ 则目标函数 $z=2x+y$ 的最小值为 ( )

(A) 2 (B) 3 (C) 4 (D) 9

4. 设集合 $M=\{x\mid 0<x\leqslant 3\}$, $N=\{x\mid 0<x\leqslant 2\}$, 那么"$a\in M$"是"$a\in N$"的 ( )

(A) 充分而不必要条件 (B) 必要而不充分条件

(C) 充分必要条件 (D) 既不充分也不必要条件

5. 将 4 个颜色互不相同的球全部放入编号为 1 和 2 的两个盒子里, 使得放入每个盒子里的球的个数不小于该盒子的编号, 则不同的放球方法有 ( )

(A) 10 种 (B) 20 种 (C) 36 种 (D) 52 种

6. 设 m、n 是两条不同的直线, α、β 是两个不同的平面. 考查下列命题, 其中正确的命题是 ( )

(A) $m\perp\alpha, n\subset\beta, m\perp n\Rightarrow\alpha\perp\beta$

(B) $\alpha /\!/ \beta, m\perp\alpha, n /\!/ \beta\Rightarrow m\perp n$

(C) $\alpha\perp\beta, m\perp\alpha, n /\!/ \beta\Rightarrow m\perp n$

(D) $\alpha\perp\beta, \alpha\cap\beta=m, n\perp m\Rightarrow n\perp\beta$

7. 已知数列 $\{a_n\}$、$\{b_n\}$ 都是公差为 1 的等差数列, 其首项分别为 a_1、b_1, 且 $a_1+b_1=5$, $a_1, b_1\in\mathbf{N}^*$. 设 $C_n=a_{b_n}$ $(n\in\mathbf{N}^*)$, 则数列 $\{C_n\}$ 的前 10 项和等于 ( )

(A) 55 (B) 70 (C) 85 (D) 100

8. 已知函数 $f(x)=a\sin x-b\cos x$ (a、b 为常数, $a\neq 0$, $x\in\mathbf{R}$) 在 $x=\frac{\pi}{4}$ 处取得最小值, 则函数 $y=f\left(\frac{3\pi}{4}-x\right)$ 是 ( )

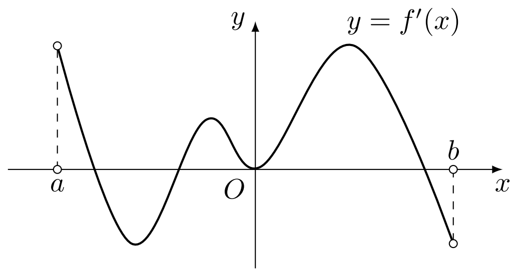
(A) 偶函数且它的图象关于点 $(\pi,0)$ 对称

(B) 偶函数且它的图象关于点 $\left(\frac{3\pi}{2},0\right)$ 对称

(C) 奇函数且它的图象关于点 $\left(\frac{3\pi}{2},0\right)$ 对称

(D) 奇函数且它的图象关于点 $(\pi,0)$ 对称

9. 函数 $f(x)$ 的定义域为开区间 (a,b), 导函数 $f'(x)$ 在 (a,b) 内的图像如图所示, 则函数 $f(x)$ 在开区间 (a,b) 内有极小值点 ( )



(A) 1 个 (B) 2 个 (C) 3 个 (D) 4 个

10. 已知函数 $y=f(x)$ 的图象与函数 $y=a^x$ ($a>0$ 且 $a\neq 1$) 的图象关于直线 $y=x$ 对称, 记 $g(x)=f(x)[f(x)+f(2)-1]$. 若 $y=g(x)$ 在区间 $\left[\frac{1}{2},2\right]$ 上是增函数, 则实数 a 的取值范围是 ( )

(A) $[2,+\infty)$ (B) $(0,1)\cup(1,2)$

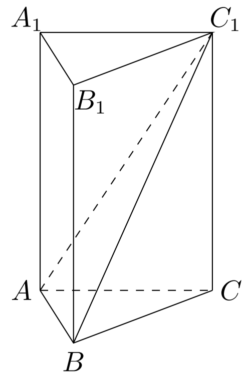
(C) $\left[\frac{1}{2},1\right)$ (D) $\left(0,\frac{1}{2}\right]$

二、填空题

11. $\left(2x+\dfrac{1}{\sqrt{x}}\right)^7$ 的二项展开式中 x 的系数是______. (用数字作答)

12. 设向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的夹角为 θ, 且 $\boldsymbol{a}=(3,3)$, $2\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a}=(-1,1)$, 则 $\cos\theta=$______.

13. 如图, 在正三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中, $AB=1$. 若二面角 $C-AB-C_1$ 的大小为 $60°$, 则点 C 到平面 ABC_1 的距离为______.



14. 设直线 $ax-y+3=0$ 与圆 $(x-1)^2+(y-2)^2=4$ 相交于 A、B 两点, 且弦 AB 的长为 $2\sqrt{3}$, 则 $a=$______.

15. 某公司一年购买某种货物 400 吨, 每次都购买 x 吨, 运费为 4 万元/次, 一年的总存储费用为 $4x$ 万元, 要使一年的总运费与总存储费用之和最小, 则 $x=$______吨.

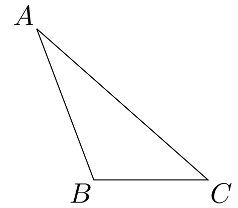
16. 设函数 $f(x)=\dfrac{1}{x+1}$, 点 A_0 表示坐标原点, 点 $A_n(n,f(n))$ $(n\in\mathbf{N}^*)$. 若向量 $\overrightarrow{a_n}=\overrightarrow{A_0A_1}+\overrightarrow{A_1A_2}+\cdots+\overrightarrow{A_{n-1}A_n}$, θ_n 是 $\overrightarrow{a_n}$ 与 $\overrightarrow{i}$ 的夹角 (其中 $\overrightarrow{i}=(1,0)$), 设 $S_n=\tan\theta_1+\tan\theta_2+\cdots+\tan\theta_n$, 则 $\lim\limits_{n\to\infty}S_n=$______.

三、解答题

17. 如图, 在 $\triangle ABC$ 中, $AC=2$, $BC=1$, $\cos C=\frac{3}{4}$.

(1) 求 AB 的值;

(2) 求 $\sin(2A+C)$ 的值.



18. 某射手进行射击训练, 假设每次射击击中目标的概率为 $\frac{3}{5}$, 且每次射击的结果互不影响.

(1) 求射手在 3 次射击中, 至少有两次连续击中目标的概率 (用数字作答);

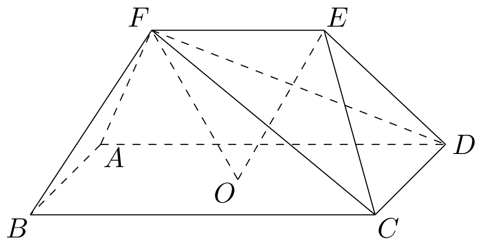
(2) 求射手第 3 次击中目标时, 恰好射击了 4 次的概率 (用数字作答);

(3) 设随机变量 ξ 表示射手第 3 次击中目标时已射击的次数, 求 ξ 的分布列.

19. 如图, 在五面体 $ABCDEF$ 中, 点 O 是矩形 $ABCD$ 的对角线的交点, 面 CDE 是等边三角形, 棱 $EF \parallel BC$ 且 $EF = \frac{1}{2}BC$.

(1) 证明: $FO \parallel$ 平面 CDE;

(2) 设 $BC = \sqrt{3}CD$, 证明: $EO \perp$ 平面 CDF.



20. 已知函数 $f(x) = 4x^3 - 3x^2\cos\theta + \frac{3}{16}\cos\theta$, 其中 $x \in \mathbf{R}$, θ 为参数, 且 $0 \leqslant \theta < 2\pi$.

(1) 当 $\cos\theta = 0$ 时, 判断函数 $f(x)$ 是否有极值;

(2) 要使函数 $f(x)$ 的极小值大于零, 求参数 θ 的取值范围;

(3) 若对 (2) 中所求的取值范围内的任意参数 θ, 函数 $f(x)$ 在区间 $(2a-1, a)$ 内都是增函数, 求实数 a 的取值范围.

21. 已知数列 $\{x_n\}$、$\{y_n\}$ 满足 $x_1 = x_2 = 1$, $y_1 = y_2 = 2$, 并且 $\frac{x_{n+1}}{x_n} = \lambda\frac{x_n}{x_{n-1}}$, $\frac{y_{n+1}}{y_n} \geqslant \lambda\frac{y_n}{y_{n-1}}$ (λ 为非零参数, $n = 2, 3, 4, \cdots$).

(1) 若 x_1, x_3, x_5 成等比数列, 求参数 λ 的值;

(2) 当 $\lambda > 0$ 时, 证明: $\frac{x_{n+1}}{y_{n+1}} \leqslant \frac{x_n}{y_n}$ ($n \in \mathbf{N}^*$);

(3) 当 $\lambda > 1$, 证明: $\frac{x_1 - y_1}{x_2 - y_2} + \frac{x_2 - y_2}{x_3 - y_3} + \cdots + \frac{x_n - y_n}{x_{n+1} - y_{n+1}} < \frac{\lambda}{\lambda - 1}$ ($n \in \mathbf{N}^*$).

22. 如图, 以椭圆 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($a > b > 0$) 的中心 O 为圆心, 分别以 a 和 b 为半径作大圆和小圆. 过椭圆右焦点 $F(c, o)$ ($c > b$) 作垂直于 x 轴的直线交大圆于第一象限内的点 A. 连结 OA 交小圆于点 B. 设直线 BF 是小圆的切线.

(1) 证明 $c^2 = ab$, 并求直线 BF 与 y 轴的交点 M 的坐标;

(2) 设直线 BF 交椭圆于 P、Q 两点, 证明: $\overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{OQ} = \frac{1}{2}b^2$.