# 2006 普通高等学校招生考试 (安徽卷理)

## 一、选择题

1. 复数 $\dfrac{1+\sqrt{3}\mathrm{i}}{\sqrt{3}-\mathrm{i}}$ 等于 ( )

(A) $\mathrm{i}$ (B) $-\mathrm{i}$ (C) $\sqrt{3}+\mathrm{i}$ (D) $\sqrt{3}-\mathrm{i}$

2. 设集合 $A=\{x \mid |x-2|\leqslant 2,\ x\in\mathbf{R}\}$, $B=\{y \mid y=-x^2,\ -1\leqslant x\leqslant 2\}$, 则 $\complement_{\mathbf{R}}(A\cap B)$ 等于 ( )

(A) $\mathbf{R}$ (B) $\{x \mid x\in\mathbf{R},\ x\neq 0\}$

(C) $\{0\}$ (D) $\varnothing$

3. 若抛物线 $y^2=2px$ 的焦点与椭圆 $\dfrac{x^2}{6}+\dfrac{y^2}{2}$ 的右焦点重合, 则 $p$ 的值为( )

(A) $-2$ (B) $2$ (C) $-4$ (D) $4$

4. 设 $a$, $b\in\mathbf{R}$, 已知命题 $p$: $a=b$; 命题 $q$: $\left(\dfrac{a+b}{2}\right)^2\leqslant\dfrac{a^2+b^2}{2}$, 则 $p$ 是 $q$ 成立的 ( )

(A) 必要不充分条件 (B) 充分不必要条件

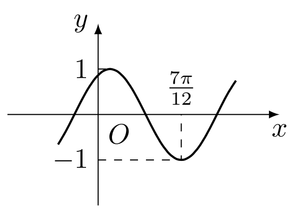
(C) 充分必要条件 (D) 既不充分也不必要条件

5. 函数 $y=\begin{cases}2x, & x\geqslant 0,\\ -x^2, & x<0,\end{cases}$ 的反函数是 ( )

(A) $y=\begin{cases}\dfrac{x}{2}, & x\geqslant 0,\\ \sqrt{-x}, & x<0.\end{cases}$ (B) $y=\begin{cases}2x, & x\geqslant 0,\\ \sqrt{-x}, & x<0.\end{cases}$

(C) $y=\begin{cases}\dfrac{x}{2}, & x\geqslant 0,\\ -\sqrt{-x}, & x<0.\end{cases}$ (D) $y=\begin{cases}2x, & x\geqslant 0,\\ -\sqrt{-x}, & x<0.\end{cases}$

6. 将函数 $y=\sin\omega x\ (\omega>0)$ 的图象按向量 $\vec{a}=\left(-\dfrac{\pi}{6},0\right)$ 平移, 平移后的图象如图所示, 则平移后的图象所对应的函数解析式是 ( )




(A) $y=\sin\left(x+\dfrac{\pi}{6}\right)$ (B) $y=\sin\left(x-\dfrac{\pi}{6}\right)$

(C) $y=\sin\left(2x+\dfrac{\pi}{3}\right)$ (D) $y=\sin\left(2x-\dfrac{\pi}{3}\right)$

7. 若曲线 $y=x^4$ 的一条切线 $l$ 与直线 $x+4y-8=0$ 垂直, 则 $l$ 的方程为( )

(A) $4x-y-3=0$ (B) $x+4y-5=0$

(C) $4x-y+3=0$ (D) $x+4y+3=0$

8. 设 $a>0$, 对于函数 $f(x)=\dfrac{\sin x+a}{\sin x}\ (0<x<\pi)$, 下列结论正确的是 ( )

(A) 有最大值而无最小值 (B) 有最小值而无最大值

(C) 有最大值且有最小值 (D) 既无最大值又无最小值

9. 表面积为 $2\sqrt{3}$ 的正八面体的各个顶点都在同一球面上, 则此球的体积为 ( )

(A) $\dfrac{\sqrt{2}}{3}\pi$ (B) $\dfrac{1}{3}\pi$ (C) $\dfrac{2}{3}\pi$ (D) $\dfrac{2\sqrt{2}}{3}\pi$

10. 如果实数 $x$, $y$ 满足条件 $\begin{cases}x-y+1\geqslant 0,\\ y+1\geqslant 0,\\ x+y+1\leqslant 0,\end{cases}$ 那么 $2x-y$ 的最大值为 ( )

(A) $2$ (B) $1$ (C) $-2$ (D) $-3$

11. 如果 $\triangle A_1B_1C_1$ 的三个内角的余弦值分别等于 $\triangle A_2B_2C_2$ 的三个内角的正弦值, 则 ( )

(A) $\triangle A_1B_1C_1$ 和 $\triangle A_2B_2C_2$ 都是锐角三角形

(B) $\triangle A_1B_1C_1$ 和 $\triangle A_2B_2C_2$ 都是钝角三角形

(C) $\triangle A_1B_1C_1$ 是钝角三角形, $\triangle A_2B_2C_2$ 是锐角三角形

(D) $\triangle A_1B_1C_1$ 是锐角三角形, $\triangle A_2B_2C_2$ 是钝角三角形

12. 在正方体上任选 3 个顶点连成三角形, 则所得的三角形是直角非等腰三角形的概率为 ( )

(A) $\dfrac{1}{7}$ (B) $\dfrac{2}{7}$ (C) $\dfrac{3}{7}$ (D) $\dfrac{4}{7}$

## 二、填空题

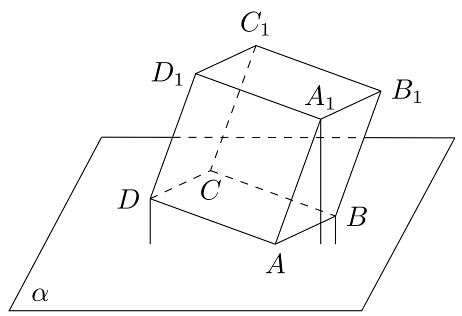
13. 设常数 $a>0$, $\left(ax^2+\dfrac{1}{\sqrt{x}}\right)^4$ 展开式中 $x^3$ 的系数为 $\dfrac{3}{2}$, 则 $\lim\limits_{n\to\infty}(a+a^2+\cdots+a^n)=$______.

14. 在平行四边形 $ABCD$ 中, $\overrightarrow{AB}=\vec{a}$, $\overrightarrow{AD}=\vec{b}$, $\overrightarrow{AN}=3\overrightarrow{NC}$, $M$ 为 $BC$ 的中点, 则 $\overrightarrow{MN}=$______. (用 $\vec{a}$, $\vec{b}$ 表示)

15. 函数 $f(x)$ 对于任意实数 $x$ 满足条件 $f(x+2)=\dfrac{1}{f(x)}$, 若 $f(1)=-5$, 则 $f(f(5))=$______.

16. 多面体上, 位于同一条棱两端的顶点称为相邻的. 如图, 正方体的一个顶点 $A$ 在平面 $\alpha$ 内, 其余顶点在 $\alpha$ 的同侧, 正方体上与顶点 $A$ 相邻的三个顶点到 $\alpha$ 的距离分别为 1, 2 和 4. $P$ 是正方体的其余四个顶点中的一个, 则 $P$ 到平面 $\alpha$ 的距离可能是: ① 3; ② 4; ③ 5; ④ 6; ⑤ 7.

以上结论正确的是______. (写出所有正确结论的编号)




## 三、解答题

17. 已知 $\dfrac{3\pi}{4}<\alpha<\pi$, $\tan\alpha+\cot\alpha=-\dfrac{10}{3}$.

(1) 求 $\tan\alpha$ 的值;

(2) 求 $\dfrac{5\sin^2\dfrac{\alpha}{2}+8\sin\dfrac{\alpha}{2}\cos\dfrac{\alpha}{2}+11\cos^2\dfrac{\alpha}{2}-8}{\sqrt{2}\sin\left(\alpha-\dfrac{\pi}{2}\right)}$ 的值.

18. 在添加剂的搭配适用中, 为了找到最佳的搭配方案, 需要对各种不同的搭配方式作比较, 在试制某种牙膏新品种时, 需要选用两种不同的添加剂. 现有芳香度分别为 0, 1, 2, 3, 4, 5 的六种添加剂可供选用. 根据实验设计学原理, 通常首先要随机选取两种不同的添加剂进行搭配实验. 用 $\xi$ 表示所选用的两种不同的添加剂的芳香度之和.

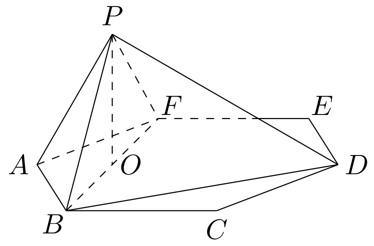
(1) 写出 $\xi$ 的分布列; (以列表的形式给出结论, 不必写计算过程)

(2) 求 $\xi$ 的数学期望 $E\xi$. (要求写出计算过程或说明道理)

19. 如图, $P$ 是边长为 1 的正六边形 $ABCDEF$ 所在平面外一点, $PA=1$, $P$ 在平面 $ABC$ 内的射影为 $BF$ 的中点 $O$.

(1) 证明: $PA\perp BF$;

(2) 求面 $APB$ 与面 $DPB$ 所成二面角的大小.




20. 已知函数 $f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上有定义, 对任意实数 $a>0$ 和任意实数 $x$, 都有 $f(ax)=af(x)$.

(1) 证明 $f(0)=0$;

(2) 证明 $f(x)=\begin{cases}kx, & x\geqslant 0,\\ hx, & x<0,\end{cases}$ 其中 $k$ 和 $h$ 均为常数;

(3) 当 (2) 中的 $k>0$ 时, 设 $g(x)=\dfrac{1}{f(x)}+f(x)\ (x>0)$, 讨论 $g(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 内的单调性并求极值.

21. 数列 $\{a_n\}$ 的前 $n$ 项和为 $S_n$, 已知 $a_1=\dfrac{1}{2}$, $S_n=n^2a_n-n(n-1)$, $n=1,2,\cdots$.

(1) 写出 $S_n$ 与 $S_{n-1}$ 的递推关系式 $(n\geqslant 2)$, 并求 $S_n$ 关于 $n$ 的表达式;

(2) 设 $f_n(x)=\dfrac{S_n}{n}x^{n+1}$, $b_n=f_n'(p)\ (p\in\mathbf{R})$, 求数列 $\{b_n\}$ 的前 $n$ 项和 $T_n$.

22. 如图, $F$ 为双曲线 $C$: $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1\ (a>0,\ b>0)$ 的右焦点, $P$ 为双曲线 $C$ 右支上一点, 且位于 $x$ 轴上方, $M$ 为左准线上一点, $O$ 为坐标原点. 已知四边形 $OFPM$ 为平行四边形, $|PF|=\lambda|OF|$.

(1) 写出双曲线 $C$ 的离心率 $e$ 与 $\lambda$ 的关系式;

(2) 当 $\lambda=1$ 时, 经过焦点 $F$ 且平行于 $OP$ 的直线交双曲线于 $A$、$B$ 点, 若 $|AB|=12$, 求此时的双曲线方程.