2006 普通高等学校招生考试 (山东卷文)

一、选择题

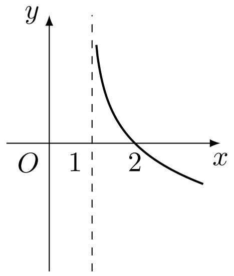
1. 定义集合运算: $A \odot B = \{z \mid z = xy(x+y),\ x \in A,\ y \in B\}$, 设集合 $A = \{0,\ 1\}$, $B = \{2,\ 3\}$, 则集合 $A \odot B$ 的所有元素之和为 ( )

(A) 0 (B) 6 (C) 12 (D) 18

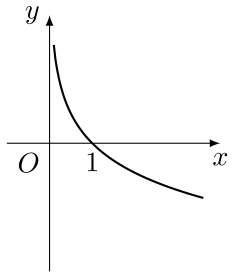
2. 设 $f(x) = \begin{cases} 2e^{x-1}, & x < 2, \\ \log_3(x^2-1), & x \geqslant 2, \end{cases}$ 则 $f(f(2))$ 的值为 ( )

(A) 0 (B) 1 (C) 2 (D) 3

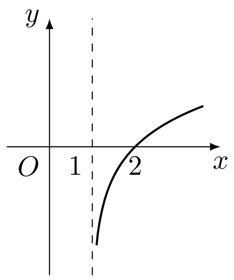
3. 函数 $y = 1 + a^x$ $(0 < a < 1)$ 的反函数的图象大致是 ( )



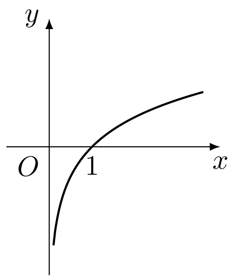
(A)



(B)



(C)



(D)

4. 设向量 $\boldsymbol{a} = (1, -3)$, $\boldsymbol{b} = (-2, 4)$, 若表示向量 $4\boldsymbol{a}$, $3\boldsymbol{b} - 2\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{c}$ 的有向线段首尾相接能构成三边形, 则向量 $\boldsymbol{c}$ 为 ( )

(A) $(1, -1)$ (B) $(-1, 1)$ (C) $(-4, 6)$ (D) $(4, -6)$

5. 已知定义在 $\mathbf{R}$ 上的奇函数 $f(x)$ 满足 $f(x+2) = -f(x)$, 则 $f(6)$ 的值为 ( )

(A) -1 (B) 0 (C) 1 (D) 2

6. 在 $\triangle ABC$ 中, 角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c, 已知 $A = \dfrac{\pi}{3}$, $a = \sqrt{3}$, $b = 1$, 则 $c =$ ( )

(A) 1 (B) 2 (C) $\sqrt{3} - 1$ (D) $\sqrt{3}$

7. 在给定双曲线中, 过焦点且垂直于实轴的弦长为 $\sqrt{2}$, 焦点到相应准线的距离为 $\dfrac{1}{2}$, 则该双曲线的离心率为 ( )

(A) $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ (B) 2 (C) $\sqrt{2}$ (D) $2\sqrt{2}$

8. 正方体的内切球与其外接球的体积之比为 ( )

(A) $1 : \sqrt{3}$ (B) $1 : 3$ (C) $1 : 3\sqrt{3}$ (D) $1 : 9$

9. 设 p: $x^2 - x - 2 < 0$, q: $\dfrac{1+x}{|x|-2} < 0$, 则 p 是 q 的 ( )

(A) 充分不必要条件 (B) 必要不充分条件

(C) 充要条件 (D) 既不充分也不必要条件

10. 已知 $\left(x^2 - \dfrac{1}{\sqrt{x}}\right)^n$ 的展开式中第三项与第五项的系数之比为 $\dfrac{3}{14}$, 则展开式中常数项是 ( )

(A) -1 (B) 1 (C) -45 (D) 45

11. 已知集合 $A = \{5\}$, $B = \{1,\ 2\}$, $C = \{1,\ 3,\ 4\}$, 从这三个集合各取一个元素构成空间直角坐标系中点的坐标, 则确定的不同点的个数为 ( )

(A) 33 (B) 34 (C) 35 (D) 36

12. 已知 x 和 y 是正整数, 且满足约束条件 $\begin{cases} x + y \leqslant 10, \\ x - y \leqslant 2, \\ 2x \geqslant 7, \end{cases}$ 则 $z = 2x + 3y$ 的最小值是 ( )

(A) 24 (B) 14 (C) 13 (D) 11.5

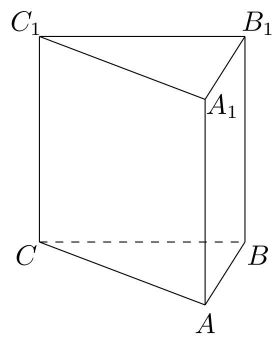
二、填空题

13. 某学校共有师生 2400 人, 现用分层抽样的方法, 从所有师生中抽取一个容量为 160 的样本. 已知从学生中抽取的人数为 150, 那么该学校的教师人数是______.

14. 设 S_n 为等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和, $S_4 = 14$, $S_{10} - S_7 = 30$, 则 $S_9 =$______.

15. 已知抛物线 $y^2 = 4x$, 过点 $P(4, 0)$ 的直线与抛物线相交于 $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$ 两点, 则 $y_1^2 + y_2^2$ 的最小值是______.

16. 如图, 在正三棱柱 $ABC - A_1B_1C_1$ 中, 所有棱长均为 1, 则点 B_1 到平面 ABC_1 的距离为______.



三、解答题

17. 设函数 $f(x) = 2x^3 - 3(a-1)x^2 + 1$, 其中 $a \geqslant 1$.

(1) 求 $f(x)$ 的单调区间;

(2) 讨论 $f(x)$ 的极值.

18. 已知函数 $f(x) = A\sin^2(\omega x + \varphi)$ $\left(A > 0,\ \omega > 0,\ 0 < \varphi < \dfrac{\pi}{2}\right)$, 且 $y = f(x)$ 的最大值为 2, 其图象相邻两对称轴间的距离为 2, 并过点 $(1, 2)$.

(1) 求 φ;

(2) 计算 $f(1) + f(2) + \cdots + f(2008)$.

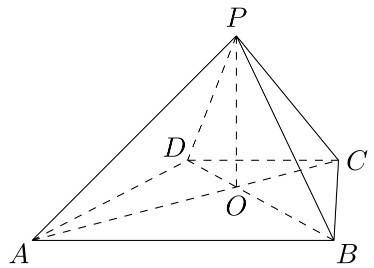
19. 盒中装有标有数字 1, 2, 3, 4 的卡片各 2 张, 从盒中任意抽取 3 张, 每张卡片被取出的可能性都相等, 求:

(1) 抽出的 3 张卡片上最大的数字是 4 的概率;

(2) 抽出的 3 张中有 2 张卡片上的数字是 3 的概率;

(3) 抽出的 3 张卡片上的数字互不相同的概率.

20. 如图, 已知四棱锥 $P-ABCD$ 的底面 $ABCD$ 为等腰梯形, $AB \parallel DC$, $AC \perp BD$, AC 与 BD 相交于点 O, 且顶点 P 在底面上的射影恰为 O 点. 又 $BO=2$, $PO=\sqrt{2}$, $PB \perp PD$.
(1) 求异面直线 PD 与 BC 所成角的余弦值;
(2) 求二面角 $P-AB-C$ 的大小;
(3) 设点 M 在棱 PC 上, 且 $\dfrac{PM}{MC}=\lambda$, 问 λ 为何值时, $PC \perp$ 平面 BMD.



21. 已知椭圆的中心在坐标原点 O, 焦点在 x 轴上, 椭圆的短轴端点和焦点所组成的四边形为正方形, 两准线间的距离为 4.
(1) 求椭圆的方程;
(2) 直线 l 过点 $P(0,2)$ 且与椭圆相交于 A、B 两点, 当 $\triangle AOB$ 面积取得最大值时, 求直线 l 的方程.

22. 已知数列 $\{a_n\}$ 中, $a_1=\dfrac{1}{2}$. 点 $(n, 2a_{n+1}-a_n)$ 在直线 $y=x$ 上, 其中 $n=1, 2, 3, \cdots$.
(1) 令 $b_n=a_{n+1}-a_n-1$, 求证数列 $\{b_n\}$ 是等比数列;
(2) 求数列 $\{a_n\}$ 的通项;
(3) 设 S_n、T_n 分别为数列 $\{a_n\}$、$\{b_n\}$ 的前 n 项和. 是否存在实数 λ, 使得数列 $\left\{\dfrac{S_n+\lambda T_n}{n}\right\}$ 为等差数列? 若存在, 试求出 λ; 若不存在, 则说明理由.