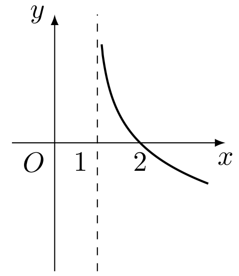
2006 普通高等学校招生考试 (山东卷理)

一、选择题

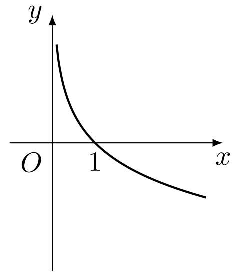
1. 定义集合运算: $A\odot B=\{z\mid z=xy(x+y),\ x\in A,\ y\in B\}$, 设集合 $A=\{0,\ 1\}$, $B=\{2,\ 3\}$, 则集合 $A\odot B$ 的所有元素之和为 ( )

(A) 0　　(B) 6　　(C) 12　　(D) 18

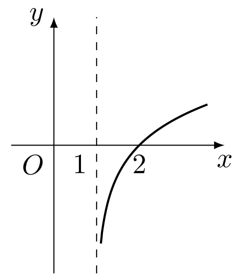
2. 函数 $y=1+a^x$ $(0<a<1)$ 的反函数的图象大致是 ( )



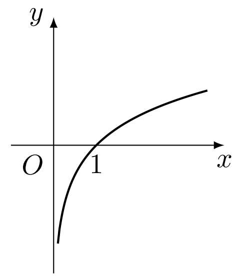
(A)



(B)



(C)



(D)

3. 设 $f(x)=\begin{cases}2\mathrm{e}^{x-1}, & x<2,\\ \log_3(x^2-1), & x\geqslant 2,\end{cases}$ 则不等式 $f(x)>2$ 的解集为 ( )

(A) $(1,2)\cup(3,+\infty)$　　(B) $(\sqrt{10},+\infty)$

(C) $(1,2)\cup(\sqrt{10},+\infty)$　　(D) $(1,2)$

4. 在 $\triangle ABC$ 中, 角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c, 已知 $A=\dfrac{\pi}{3}$, $a=\sqrt{3}$, $b=1$, 则 $c=$ ( )

(A) 1　　(B) 2　　(C) $\sqrt{3}-1$　　(D) $\sqrt{3}$

5. 设向量 $\boldsymbol{a}=(1,-2)$, $\boldsymbol{b}=(-2,4)$, $\boldsymbol{c}=(-1,-2)$, 若表示向量 $4\boldsymbol{a}$, $4\boldsymbol{b}-2\boldsymbol{c}$, $2(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{c})$, $\boldsymbol{d}$ 的有向线段首尾相接能构成四边形, 则向量 $\boldsymbol{d}$ 为 ( )

(A) $(2,6)$　　(B) $(-2,6)$　　(C) $(2,-6)$　　(D) $(-2,-6)$

6. 已知定义在 $\mathbf{R}$ 上的奇函数 $f(x)$ 满足 $f(x+2)=-f(x)$, 则 $f(6)$ 的值为 ( )

(A) -1　　(B) 0　　(C) 1　　(D) 2

7. 在给定椭圆中, 过焦点且垂直于长轴的弦长为 $\sqrt{2}$, 焦点到相应准线的距离为 1, 则该椭圆的离心率为 ( )

(A) $\sqrt{2}$　　(B) $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$　　(C) $\dfrac{1}{2}$　　(D) $\dfrac{\sqrt{2}}{4}$

8. 设 p: $x^2-x-20>0$, q: $\dfrac{1-x^2}{|x|-2}<0$, 则 p 是 q 的 ( )

(A) 充分不必要条件　　(B) 必要不充分条件

(C) 充要条件　　(D) 既不充分也不必要条件

9. 已知集合 $A=\{5\}$, $B=\{1,\ 2\}$, $C=\{1,\ 3,\ 4\}$, 从这三个集合各取一个元素构成空间直角坐标系中点的坐标, 则确定的不同点的个数为 ( )

(A) 33　　(B) 34　　(C) 35　　(D) 36

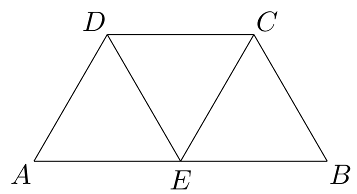
10. 已知 $\left(x^3-\dfrac{\mathrm{i}}{\sqrt{x}}\right)^n$ 的展开式中第三项与第五项的系数之比为 $-\dfrac{3}{14}$, 其中 $\mathrm{i}^2=-1$, 则展开式中常数项是 ( )

(A) $-45\mathrm{i}$　　(B) $45\mathrm{i}$　　(C) -45　　(D) 45

11. 某公司招收男职员 x 名, 女职员 y 名, x 和 y 须满足约束条件 $\begin{cases}5x-11y\geqslant-22,\\ 2x+3y\geqslant 9,\\ 2x\leqslant 11,\end{cases}$ 则 $z=10x+10y$ 的最大值是 ( )

(A) 80　　(B) 85　　(C) 90　　(D) 95

12. 如图, 在等腰梯形 $ABCD$ 中, $AB=2DC=2$, $\angle DAB=60^\circ$, E 为 AB 的中点, 将 $\triangle ADE$ 与 $\triangle BEC$ 分别沿 ED、EC 向上折起, 使 A、B 重合于点 P, 则三棱锥 $P-DCE$ 的外接球的体积为 ( )



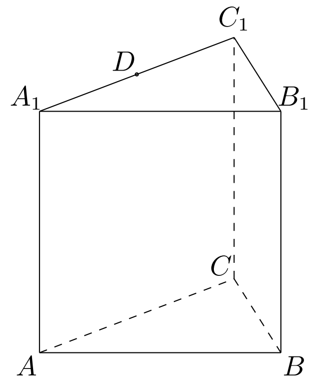
(A) $\dfrac{4\sqrt{3}\pi}{27}$　　(B) $\dfrac{\sqrt{6}\pi}{2}$　　(C) $\dfrac{\sqrt{6}\pi}{8}$　　(D) $\dfrac{\sqrt{6}\pi}{24}$

二、填空题

13. 若 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{\sqrt{n}(\sqrt{n+a}-\sqrt{n})}=1$, 则常数 $a=$______.

14. 已知抛物线 $y^2=4x$, 过点 $P(4,0)$ 的直线与抛物线相交于 $A(x_1,y_1)$, $B(x_2,y_2)$ 两点, 则 $y_1^2+y_2^2$ 的最小值是______.

15. 如图, 已知在正三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 的所有棱长都相等, D 是 A_1C_1 的中点, 则直线 AD 与平面 B_1DC 所成角的正弦值为______.



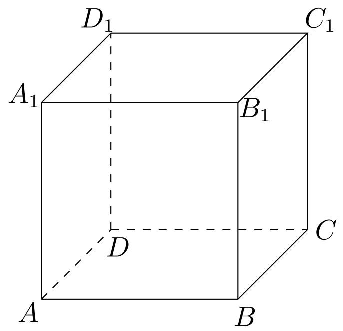
16. 下列四个命题中, 真命题的序号有______. (写出所有真命题的序号)

① 将函数 $y=|x+1|$ 的图象按向量 $\boldsymbol{v}=(-1,0)$ 平移, 得到的图象对应的函数表达式为 $y=|x|$;

② 圆 $x^2+y^2+4x+2y+1=0$ 与直线 $y=\dfrac{1}{2}x$ 相交, 所得弦长为 2;

③ 若 $\sin(\alpha+\beta)=\dfrac{1}{2}$, $\sin(\alpha-\beta)=\dfrac{1}{3}$, 则 $\tan\alpha\cot\beta=5$;

④ 如图, 已知正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$, P 为底面 $ABCD$ 内一动点, P 到平面 AA_1D_1D 的距离与到直线 CC_1 的距离相等, 则 P 点的轨迹是抛物线的一部分.



三、解答题

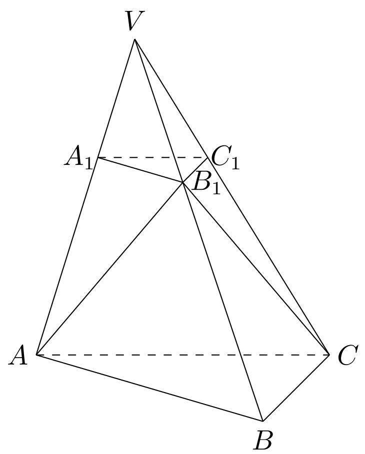
17. 已知函数 $f(x)=A\sin^2(\omega x+\varphi)$ $\left(A>0,\ \omega>0,\ 0<\varphi<\dfrac{\pi}{2}\right)$, 且 $y=f(x)$ 的最大值为 2, 其图象相邻两对称轴间的距离为 2, 并过点 $(1,2)$.

(1) 求 φ;

(2) 计算 $f(1)+f(2)+\cdots+f(2008)$.

18. 设函数 $f(x)=ax-(a+1)\ln(x+1)$, 其中 $a\geqslant -1$, 求 $f(x)$ 的单调区间.

19. 如图, 已知平面 $A_1B_1C_1$ 平行于三棱锥 $V-ABC$ 的底面 ABC, 等边 $\triangle AB_1C$ 所在平面与底面 ABC 垂直, 且 $\angle ACB=90°$, 设 $AC=2a$, $BC=a$.
(1) 求证直线 B_1C_1 是异面直线 AB_1 与 A_1C_1 的公垂线;
(2) 求点 A 到平面 VBC 的距离;
(3) 求二面角 $A-VB-C$ 的大小.



20. 袋中装有标有数字 1, 2, 3, 4, 5 的小球各 2 个, 从袋中任取 3 个小球, 按 3 个小球上最大数字的 9 倍计分, 每小球被取出的可能性都相等, 用 ξ 表示取出的 3 个小球上的最大数字, 求:
(1) 取出的 3 个小球上的数字互不相同的概率;
(2) 随机变量 ξ 的概率分布和数学期望;
(3) 计分介于 20 分到 40 分之间的概率.

21. 双曲线 C 与椭圆 $\dfrac{x^2}{8}+\dfrac{y^2}{4}=1$ 有相同的焦点, 直线 $y=\sqrt{3}x$ 为 C 的一条渐近线.
(1) 求双曲线 C 的方程;
(2) 过点 $P(0,4)$ 的直线 l, 交双曲线 C 于 A, B 两点, 交 x 轴于 Q 点 (Q 点与 C 的顶点不重合). 当 $\overrightarrow{PQ}=\lambda_1\overrightarrow{QA}=\lambda_2\overrightarrow{QB}$, 且 $\lambda_1+\lambda_2=-\dfrac{8}{3}$ 时, 求 Q 点的坐标.

22. 已知 $a_1=2$, 点 (a_n,a_{n+1}) 在函数 $f(x)=x^2+2x$ 的图象上, 其中 $n=1, 2, 3, \cdots$.
(1) 证明数列 $\{\lg(1+a_n)\}$ 是等比数列;
(2) 设 $T_n=(1+a_1)(1+a_2)\cdots(1+a_n)$, 求 T_n 及数列 $\{a_n\}$ 的通项;
(3) 记 $b_n=\dfrac{1}{a_n}+\dfrac{1}{a_n+2}$, 求数列 $\{b_n\}$ 数列的前 n 项和 S_n, 并证明 $S_n+\dfrac{2}{3T_n-1}=1$.