

2006 普通高等学校招生考试 (广东卷)

一、选择题

1. 函数 $f(x) = \frac{3x^2}{\sqrt{1-x}} + \lg(3x+1)$ 的定义域是 ()

- (A) $(-\frac{1}{3}, +\infty)$ (B) $(-\frac{1}{3}, 1)$ (C) $(-\frac{1}{3}, \frac{1}{3})$ (D) $(-\infty, -\frac{1}{3})$

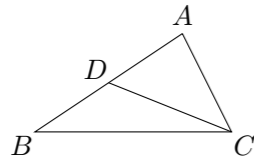
2. 若复数 z 满足方程 $z^2 + 2 = 0$, 则 $z^3 =$ ()

- (A) $\pm 2\sqrt{2}$ (B) $-2\sqrt{2}$ (C) $-2\sqrt{2}i$ (D) $\pm 2\sqrt{2}i$

3. 下列函数中, 在其定义域内既是奇函数又是减函数的是 ()

- (A) $y = -x^3, x \in \mathbf{R}$ (B) $y = \sin x, x \in \mathbf{R}$
(C) $y = x, x \in \mathbf{R}$ (D) $y = (\frac{1}{2})^x, x \in \mathbf{R}$

4. 如图所示, D 是 $\triangle ABC$ 的边 AB 上的中点, 则向量 $\overrightarrow{CD} =$ ()



- (A) $-\overrightarrow{BC} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BA}$ (B) $-\overrightarrow{BC} - \frac{1}{2}\overrightarrow{BA}$
(C) $\overrightarrow{BC} - \frac{1}{2}\overrightarrow{BA}$ (D) $\overrightarrow{BC} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BA}$

5. 给出以下四个命题:

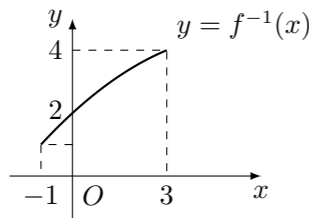
- ① 如果一条直线和一个平面平行, 经过这条直线的平面和这个平面相交, 那么这条直线和交线平行;
② 如果一条直线和一个平面内的两条相交直线都垂直, 那么这条直线垂直于这个平面;
③ 如果两条直线都平行于一个平面, 那么这两条直线互相平行;
④ 如果一个平面经过另一个平面的一条垂线, 那么这两个平面互相垂直.
其中真命题的个数是 ()

- (A) 4 (B) 3 (C) 2 (D) 1

6. 已知某共有 10 项, 其奇数项之和为 15, 偶数项之和为 30, 则其公差为 ()

- (A) 5 (B) 4 (C) 3 (D) 2

7. 函数 $y = f(x)$ 的反函数 $y = f^{-1}(x)$ 的图象与 y 轴交于点 $P(0, 2)$ (如图所示), 则方程 $f(x) = 0$ 在 $[1, 4]$ 上的根是 $x =$ ()



- (A) 4 (B) 3 (C) 2 (D) 1

8. 已知双曲线 $3x^2 - y^2 = 9$, 则双曲线右支上的点 P 到右焦点的距离与点 P 到右准线的距离之比等于 ()

- (A) $\sqrt{2}$ (B) $\frac{2\sqrt{2}}{3}$ (C) 2 (D) 4

9. 在约束条件 $\begin{cases} x \geq 0, \\ y \geq 0, \\ x + y \leq s, \\ y + 2x \leq 4 \end{cases}$ 下, 当 $3 \leq s \leq 5$ 时, 目标函数 $z = 3x + 2y$ 的大值的变化范围是 ()

- (A) $[6, 15]$ (B) $[7, 15]$ (C) $[6, 8]$ (D) $[7, 8]$

10. 对于任意的两个实数对 (a, b) 和 (c, d) , 规定: $(a, b) = (c, d)$, 当且仅当 $a = c, b = d$; 运算“ \otimes ”为: $(a, b) \otimes (c, d) = (ac - bd, bc + ad)$; 运算“ \oplus ”为: $(a, b) \oplus (c, d) = (a + c, b + d)$. 设 $p, q \in \mathbf{R}$, 若 $(1, 2) \otimes (p, q) = (5, 0)$, 则 $(1, 2) \oplus (p, q) =$ ()

- (A) $(4, 0)$ (B) $(2, 0)$ (C) $(0, 2)$ (D) $(0, -4)$

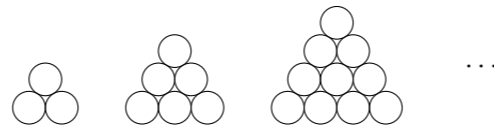
二、填空题

11. $\lim_{x \rightarrow -2} (\frac{4}{4-x^2} - \frac{1}{2+x}) =$ _____.

12. 棱长为 3 的正方体的顶点都在同一球面上, 则该球的表面积为 _____.

13. 在 $(x - \frac{2}{x})^{11}$ 的展开式中, x^5 的系数为 _____.

14. 在德国不莱梅举行的第 48 届世乒赛期间, 某商店橱窗里用同样的乒乓球堆成若干堆“正三棱锥”形的展品, 其中第 1 堆只有 1 层, 就一个球; 第 2, 3, 4, ... 堆最底层 (第一层) 分别按图示方式固定摆放, 从第二层开始, 每层的小球自然垒放在下一层之上, 第 n 堆第 n 层就放一个乒乓球, 以 $f(n)$ 表示第 n 堆的乒乓球总数, 则 $f(3) =$ _____; $f(n) =$ _____ (答案用 n 表示)



三、解答题

15. 已知函数 $f(x) = \sin x + \sin(x + \frac{\pi}{2}), x \in \mathbf{R}$.

- (1) 求 $f(x)$ 的最小正周期;
(2) 求 $f(x)$ 的最大值和最小值;
(3) 若 $f(\alpha) = \frac{3}{4}$, 求 $\sin 2\alpha$ 的值.

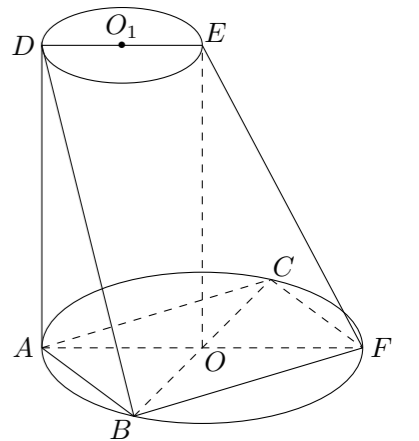
16. 某运动员射击一次所得环数 X 的分布列如下:

X	0~6	7	8	9	10
P	0	0.2	0.3	0.3	0.2

- (1) 求该运动员两次都命中 7 环的概率;
(2) 求 ξ 的分布列;
(3) 求 ξ 的数学期望 $E\xi$.

17. 如图所示, AF, DE 分别是 $\odot O, \odot O_1$ 的直径, AD 与两圆所在的平面均垂直, $AD = 8, BC$ 是 $\odot O$ 的直径, $AB = AC = 6, OE \parallel AD$.

- (1) 求二面角 $B - AD - F$ 的大小;
(2) 求直线 BD 与 EF 所成的角.



18. 设函数 $f(x) = -x^3 + 3x + 2$ 分别在 x_1, x_2 处取得极小值、极大值, xOy 平面上点 A, B 的坐标分别为 $(x_1, f(x_1)), (x_2, f(x_2))$, 该平面上动点 P 满足 $\overrightarrow{PA} \cdot \overrightarrow{PB} = 4$, 点 Q 是点 P 关于直线 $y = 2(x - 4)$ 的对称点, 求:
- (1) 求点 A, B 的坐标;
 - (2) 动点 Q 的轨迹方程.
19. 已知公比为 q ($0 < q < 1$) 的无穷等比数列 $\{a_n\}$ 各项的和为 9, 无穷等比数列 $\{a_n^2\}$ 各项的和为 $\frac{81}{5}$.
- (1) 求数列 $\{a_n\}$ 的首项 a_1 和公比 q ;
 - (2) 对给定的 k ($k = 1, 2, 3, \dots, n$), 设 $T^{(k)}$ 是首项为 a_k , 公差为 $2a_k - 1$ 的等差数列, 求 $T^{(2)}$ 的前 10 项之和;
 - (3) 设 b_i 为数列 $T^{(i)}$ 的第 i 项, $S_n = b_1 + b_2 + \dots + b_n$, 求 S_n , 并求正整数 m ($m > 1$), 使得 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{S_n}{n^m}$ 存在且不等于零.
20. A 是由定义在 $[2, 4]$ 上且满足如下条件的函数 $\varphi(x)$ 组成的集合: ① 对任意的 $x \in [1, 2]$, 都有 $\varphi(2x) \in (1, 2)$; ② 存在常数 L ($0 < L < 1$), 使得对任意的 $x_1, x_2 \in [1, 2]$, 都有 $|\varphi(2x_1) - \varphi(2x_2)| \leq L|x_1 - x_2|$.
- (1) 设 $\varphi(2x) = \sqrt[3]{1+x}, x \in [2, 4]$, 证明: $\varphi(x) \in A$;
 - (2) 设 $\varphi(x) \in A$, 如果存在 $x_0 \in (1, 2)$, 使得 $x_0 = \varphi(2x_0)$, 那么这样的 x_0 是唯一的;
 - (3) 设 $\varphi(x) \in A$, 任取 $x_1 \in (1, 2)$, 令 $x_{n-1} = \varphi(2x_n), n = 1, 2, \dots$, 证明: 给定正整数 k , 对任意的正整数 p , 成立不等式 $|x_{k+p} - x_k| \leq \frac{L^{k-1}}{1-L}|x_2 - x_1|$.