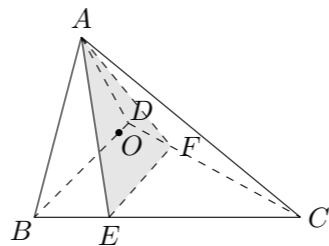


2006 普通高等学校招生考试 (江西卷理)

一、选择题

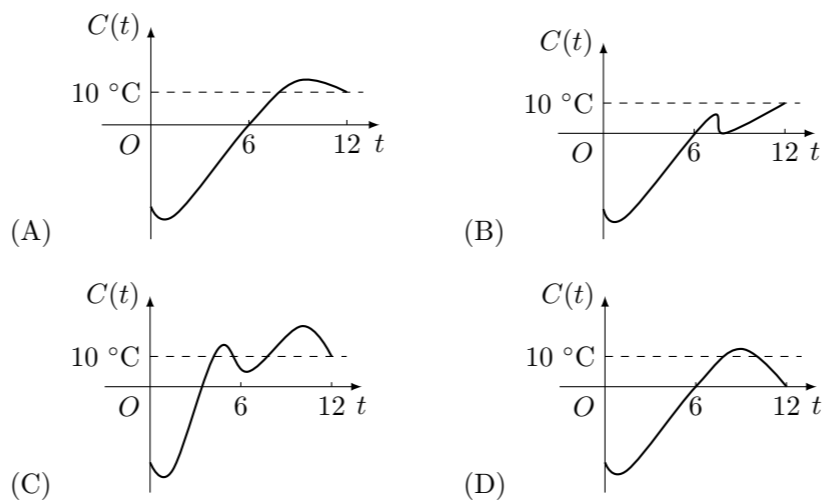
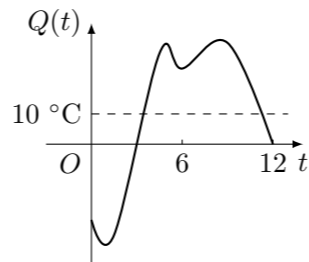
- 已知集合 $M = \left\{ x \mid \frac{x}{(x-1)^3} \geq 0 \right\}$, $N = \{ y \mid y = 3x^2 + 1, x \in \mathbf{R} \}$, 则 $M \cap N$ 等于 ()
 (A) \emptyset (B) $\{x \mid x \geq 1\}$
 (C) $\{x \mid x > 1\}$ (D) $\{x \mid x \geq 1 \text{ 或 } x < 0\}$
- 已知复数 z 满足 $(\sqrt{3} + 3i)z = 3i$, 则 z 等于 ()
 (A) $\frac{3}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$ (B) $\frac{3}{4} - \frac{\sqrt{3}}{4}i$ (C) $\frac{3}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$ (D) $\frac{3}{4} + \frac{\sqrt{3}}{4}i$
- 若 $a > 0, b > 0$, 则不等式 $-b < \frac{1}{x} < a$ 等价于 ()
 (A) $-\frac{1}{b} < x < 0$ 或 $0 < x < \frac{1}{a}$ (B) $-\frac{1}{a} < x < \frac{1}{b}$
 (C) $x < -\frac{1}{a}$ 或 $x > \frac{1}{b}$ (D) $x < -\frac{1}{b}$ 或 $x > \frac{1}{a}$
- 设 O 为坐标原点, F 为抛物线 $y^2 = 4x$ 的焦点, A 为抛物线上的一点, 若 $\vec{OA} \cdot \vec{AF} = -4$, 则点 A 的坐标为 ()
 (A) $(2, \pm 2\sqrt{2})$ (B) $(1, \pm 2)$ (C) $(1, 2)$ (D) $(2, 2\sqrt{2})$
- 对于 \mathbf{R} 上可导的任意函数 $f(x)$, 若满足 $(x-1)f'(x) \geq 0$, 则必有 ()
 (A) $f(0) + f(2) < 2f(1)$ (B) $f(0) + f(2) \leq 2f(1)$
 (C) $f(0) + f(2) \geq 2f(1)$ (D) $f(0) + f(2) > 2f(1)$
- 若不等式 $x^2 + ax + 1 \geq 0$ 对一切 $x \in \left(0, \frac{1}{2}\right]$ 成立, 则 a 的最小值为 ()
 (A) 0 (B) -2 (C) $-\frac{5}{2}$ (D) -3
- 已知等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n , 若 $\vec{OB} = a_1\vec{OA} + a_{200}\vec{OC}$, 且 A, B, C 三点共线 (该直线不过点 O), 则 S_{200} 等于 ()
 (A) 100 (B) 101 (C) 200 (D) 201
- 在 $(x - \sqrt{2})^{2006}$ 的二项展开式中, 含 x 的奇次幂的项之和为 S , 当 $x = \sqrt{2}$ 时, S 等于 ()
 (A) 2^{3008} (B) -2^{3008} (C) 2^{3009} (D) -2^{3009}
- P 为双曲线 $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16} = 1$ 的右支上一点, M, N 分别是圆 $(x+5)^2 + y^2 = 4$ 和 $(x-5)^2 + y^2 = 1$ 上的点, 则 $|PM| - |PN|$ 的最大值为 ()
 (A) 6 (B) 7 (C) 8 (D) 9
- 将 7 个人 (含甲、乙) 分成三个组, 一组 3 人, 另两组各 2 人, 不同的分组数为 a , 甲、乙分在同一组的概率为 p , 则 a, p 的值分别为 ()
 (A) $a = 105, p = \frac{5}{21}$ (B) $a = 105, p = \frac{4}{21}$
 (C) $a = 210, p = \frac{5}{21}$ (D) $a = 210, p = \frac{4}{21}$

- 如图, 在四面体 $ABCD$ 中, 截面 AEF 经过四面体的内切球 (与四个面都相切的球) 球心 O , 且与 BC, DC 分别截于 E, F . 如果截面将四面体分为体积相等的两部分, 设四棱锥 $A-BEFD$ 与三棱锥 $A-EFC$ 的表面积分别为 S_1, S_2 , 则必有 ()



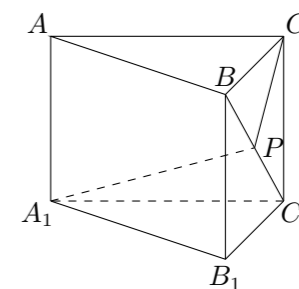
- (A) $S_1 < S_2$ (B) $S_1 > S_2$
 (C) $S_1 = S_2$ (D) S_1, S_2 的大小不能确定

- 某地一年内的气温 $Q(t)$ (单位: $^{\circ}\text{C}$) 与时间 t (月份) 之间的关系如图所示, 已知该年的平均气温为 10°C . 令 $C(t)$ 表示时间段 $[0, t]$ 的平均气温, $C(t)$ 与 t 之间的函数关系用下列图象表示, 则正确的是 ()



二、填空题

- 数列 $\left\{ \frac{1}{4n^2 - 1} \right\}$ 的前 n 项和为 S_n , 则 $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \underline{\hspace{2cm}}$.
- 设 $f(x) = \log_3(x+6)$ 的反函数为 $f^{-1}(x)$, 若 $[f^{-1}(m)+6] \cdot [f^{-1}(n)+6] = 27$, 则 $f(m+n) = \underline{\hspace{2cm}}$.
- 如图, 在直三棱柱 $ABC - A_1B_1C_1$ 中, 底面为直角三角形, $\angle ACB = 90^{\circ}$, $AC = 6, BC = CC_1 = \sqrt{2}$, P 是 BC_1 上一动点, 则 $CP + PA_1$ 的最小值为 $\underline{\hspace{2cm}}$.



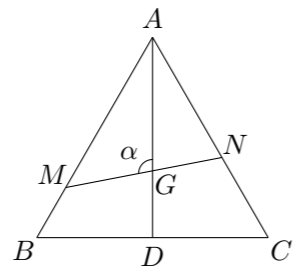
- 已知圆 $M: (x + \cos \theta)^2 + (y - \sin \theta)^2 = 1$, 直线 $l: y = kx$, 下面四个命题:
 ① 对任意实数 k 和 θ , 直线 l 和圆 M 相切;
 ② 对任意实数 k 和 θ , 直线 l 和圆 M 有公共点;
 ③ 对任意实数 θ , 必存在实数 k , 使得直线 l 和圆 M 相切;
 ④ 对任意实数 k , 必存在实数 θ , 使得直线 l 和圆 M 相切.
 其中真命题的代号是 $\underline{\hspace{2cm}}$. (写出所有真命题的代号)

三、解答题

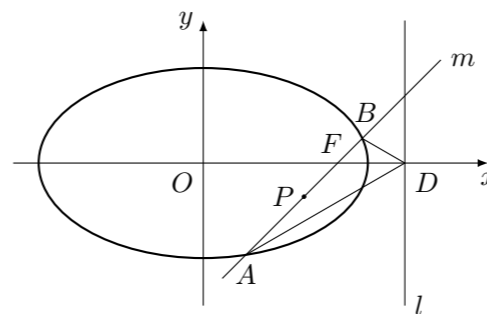
- 已知函数 $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ 在 $x = -\frac{2}{3}$ 与 $x = 1$ 时都取得极值.
 (1) 求 a, b 的值与函数 $f(x)$ 的单调区间;
 (2) 若对 $x \in [-1, 2]$, 不等式 $f(x) < c^2$ 恒成立, 求 c 的取值范围.

- 某商场举行抽奖促销互动, 抽奖规则是: 从装有 9 个白球、1 个红球的箱子中每次随机地摸出一个球, 记下颜色后放回, 摸出一个红球可获得奖金 10 元; 摸出两个红球可获得奖金 50 元. 现有甲、乙两位顾客, 规定: 甲摸一次, 乙摸两次. 令 ξ 表示甲、乙两人摸球后获得的奖金总额. 求:
 (1) ξ 的分布列;
 (2) ξ 的数学期望.

19. 如图, 已知 $\triangle ABC$ 是边长为 1 的正三角形, M 、 N 分别是边 AB 、 AC 上的点, 线段 MN 经过 $\triangle ABC$ 的中心 G . 设 $\angle MGA = \alpha$ ($\frac{\pi}{3} \leq \alpha \leq \frac{2\pi}{3}$).
- (1) 试将 $\triangle AGM$ 、 $\triangle AGN$ 的面积 (分别记为 S_1 与 S_2) 表示为 α 的函数;
- (2) 求 $y = \frac{1}{S_1^2} + \frac{1}{S_2^2}$ 的最大值与最小值.



21. 如图, 椭圆 $Q: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($a > b > 0$) 的右焦点为 $F(c, 0)$, 过点 F 的一动直线 m 绕点 F 转动, 并且交椭圆于 A 、 B 两点, P 为线段 AB 的中点.
- (1) 求点 P 的轨迹 H 的方程;
- (2) 在 Q 的方程中, 令 $a^2 = 1 + \cos \theta + \sin \theta$, $b^2 = \sin \theta$ ($0 < \theta \leq \frac{\pi}{2}$), 确定 θ 的值, 使原点距椭圆的右准线 l 最远, 此时, 设 l 与 x 轴交点为 D , 当直线 m 绕点 F 转动到什么位置时, 三角形 ABD 的面积最大?



22. 已知数列 $\{a_n\}$ 满足: $a_1 = \frac{3}{2}$, 且 $a_n = \frac{3na_{n-1}}{2a_{n-1} + n - 1}$ ($n \geq 2, n \in \mathbf{N}^*$).
- (1) 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式;
- (2) 证明: 对一切正整数 n , 不等式 $a_1 \cdot a_2 \cdots a_n < 2 \cdot n!$ 恒成立.

20. 如图, 在三棱锥 $A-BCD$ 中, 侧面 ABD 、 ACD 是全等的直角三角形, AD 是公共的斜边, 且 $AD = \sqrt{3}$, $BD = CD = 1$, 另一个侧面 ABC 是正三角形.
- (1) 求证: $AD \perp BC$;
- (2) 求二面角 $B-AC-D$ 的大小;
- (3) 在直线 AC 上是否存在一点 E , 使 ED 与面 BCD 成 30° 角? 若存在, 确定 E 的位置; 若不存在, 说明理由.

