2006 普通高等学校招生考试 (湖南卷文)

一、选择题

1. 函数 $y=\sqrt{\log_2 x}$ 的定义域是 ( )

(A) $(0,1]$ (B) $(0,+\infty)$ (C) $(1,+\infty)$ (D) $[1,+\infty)$

2. 已知向量 $\vec{a}=(2,t)$, $\vec{b}=(1,2)$, 若 $t=t_1$ 时, $\vec{a}\parallel\vec{b}$; $t=t_2$ 时, $\vec{a}\perp\vec{b}$, 则 ( )

(A) $t_1=-4$, $t_2=-1$ (B) $t_1=-4$, $t_2=1$

(C) $t_1=4$, $t_2=-1$ (D) $t_1=4$, $t_2=1$

3. 若 $(ax-1)^5$ 的展开式中 x^3 的系数是 80, 则实数 a 的值是 ( )

(A) -2 (B) $2\sqrt{2}$ (C) $\sqrt[3]{4}$ (D) 2

4. 过半径为 2 的球 O 表面上一点 A 作球 O 的截面, 若 OA 与该截面所成的角是 60°, 则该截面的面积是 ( )

(A) π (B) 2π (C) 3π (D) $2\sqrt{3}\pi$

5. “$a=1$”是“函数 $f(x)=|x-a|$ 在区间 $[1,+\infty)$ 上为增函数”的 ( )

(A) 充分不必要条件 (B) 必要不充分条件

(C) 充要条件 (D) 既不充分也不必要条件

6. 在数字 1, 2, 3 与符号 $+$, $-$ 五个元素的所有全排列中, 任意两个数字都不相邻的全排列个数是 ( )

(A) 6 (B) 12 (C) 18 (D) 24

7. 圆 $x^2+y^2-4x-4y-10=0$ 上的点到直线 $x+y-14=0$ 的最大距离与最小距离的差是 ( )

(A) 36 (B) 18 (C) $6\sqrt{2}$ (D) $5\sqrt{2}$

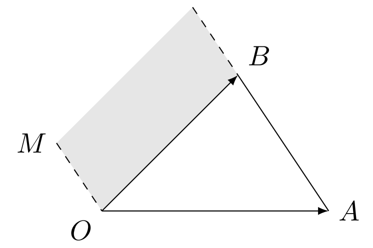
8. 设点 P 是函数 $f(x)=\sin\omega x$ 的图象 C 的一个对称中心, 若点 P 到图象 C 的对称轴上的距离的最小值是 $\dfrac{\pi}{4}$, 则 $f(x)$ 的最小正周期是 ( )

(A) 2π (B) π (C) $\dfrac{\pi}{2}$ (D) $\dfrac{\pi}{4}$

9. 过双曲线 M: $x^2-\dfrac{y^2}{b^2}=1$ 的左顶点 A 作斜率为 1 的直线 l, 若 l 与双曲线 M 的两条渐近线分别相交于点 B, C, 且 $|AB|=|BC|$, 则双曲线 M 的离心率是 ( )

(A) $\dfrac{\sqrt{5}}{2}$ (B) $\dfrac{\sqrt{10}}{3}$ (C) $\sqrt{5}$ (D) $\sqrt{10}$

10. 如图, $OM\parallel AB$, 点 P 由射线 OM、线段 OB 及 AB 的延长线围成的阴影区域内 (不含边界), 且 $\overrightarrow{OP}=x\overrightarrow{OA}+y\overrightarrow{OB}$, 则实数对 (x,y) 可以是 ( )



(A) $\left(\dfrac{1}{4},\dfrac{3}{4}\right)$ (B) $\left(-\dfrac{2}{3},\dfrac{2}{3}\right)$ (C) $\left(-\dfrac{1}{4},\dfrac{3}{4}\right)$ (D) $\left(-\dfrac{1}{5},\dfrac{7}{5}\right)$

二、填空题

11. 若数列 $\{a_n\}$ 满足: $a_1=1$, $a_{n+1}=2a_n$, $n=1, 2, 3, \cdots$, 则 $a_1+a_2+\cdots+a_n=$______.

12. 某高校有甲、乙两个数学建模兴趣班. 其中甲班 40 人, 乙班 50 人. 现分析两个班的一次考试成绩, 算得甲班的平均成绩是 90 分, 乙班的平均成绩是 81 分, 则该校数学建模兴趣班的平均成绩是______分.

13. 已知 $\begin{cases} x\geqslant 1, \\ x-y+1\leqslant 0, \\ 2x-y-2\leqslant 0, \end{cases}$ 则 x^2+y^2 的最小值是______.

14. 过三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 的任意两条棱的中点作直线, 其中与平面 ABB_1A_1 平行的直线共有______条.

15. 若 $f(x)=a\sin\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right)+3\sin\left(x-\dfrac{\pi}{4}\right)$ 是偶函数, 则 $a=$______.

三、解答题

16. 已知 $\sqrt{3}\sin\theta-\dfrac{\sin\left(\dfrac{\pi}{2}-2\theta\right)}{\cos(\pi+\theta)}\cdot\cos\theta=1$, $\theta\in(0,\pi)$, 求 θ 的值.

17. 某安全生产监督部门对 5 家小型煤矿进行安全检查 (简称安检). 若安检不合格, 则必须整改. 若整改后经复查仍不合格, 则强制关闭. 设每家煤矿安检是否合格是相互独立的, 且每家煤矿整改前安检合格的概率是 0.5, 整改后安检合格的概率是 0.8, 计算 (结果精确到 0.01):

(1) 恰好有两家煤矿必须整改的概率;

(2) 某煤矿不被关闭的概率;

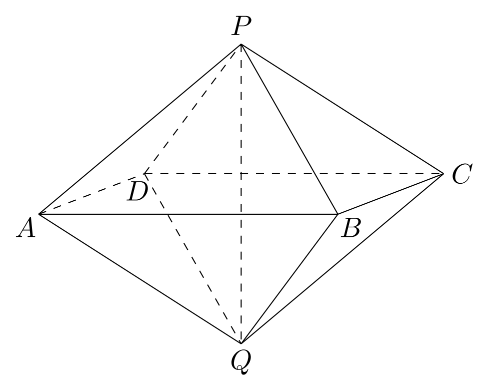
(3) 至少关闭一家煤矿的概率.

18. 如图, 已知两个正四棱锥 $P-ABCD$ 与 $Q-ABCD$ 的高都是 2, $AB=4$.

(1) 证明: $PQ\perp$ 平面 $ABCD$;

(2) 求异面直线 AQ 与 PB 所成的角;

(3) 求点 P 到平面 QAD 的距离.



19. 已知函数 $f(x)=ax^3-3x^2+1-\dfrac{3}{a}$.

(1) 讨论函数 $f(x)$ 的单调性;

(2) 若曲线 $y=f(x)$ 上两点 A、B 处的切线都与 y 轴垂直, 且线段 AB 与 x 轴有公共点, 求实数 a 的取值范围.

20. 在 m $(m\geqslant 2)$ 个不同数的排列 $P_1P_2\cdots P_m$ 中, 若 $1\leqslant i\leqslant j\leqslant m$ 时 $P_i>P_j$ (即前面某数大于后面某数), 则称 P_i 与 P_j 构成一个逆序. 一个排列的全部逆序的总数称为该排列的逆序数. 记排列 $(n+1)n(n-1)\cdots 321$ 的逆序数为 a_n, 如排列 21 的逆序数 $a_1=1$, 排列 321 的逆序数 $a_2=3$, 排列 4321 的逆序数 $a_3=6$.

(1) 求 a_4、a_5, 并写出 a_n 的表达式;

(2) 令 $b_n=\dfrac{a_n}{a_{n+1}}+\dfrac{a_{n+1}}{a_n}$, 证明: $2n<b_1+b_2+\cdots b_n<2n+3$, $n=1,2,\cdots$.

21. 已知椭圆 C_1: $\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{3}=1$, 抛物线 C_2: $(y-m)^2=2px$ $(p>0)$, 且 C_1、C_2 的公共弦 AB 过椭圆 C_1 的右焦点.

(1) 当 $AB\perp x$ 轴时, 求 m、p 的值, 并判断抛物线 C_2 的焦点是否在直线 AB 上;

(2) 若 $p=\dfrac{4}{3}$ 且抛物线 C_2 的焦点在直线 AB 上, 求 m 的值及直线 AB 的方程.