2006 普通高等学校招生考试 (湖南卷理)

一、选择题

1. 函数 $y=\sqrt{\log_2 x-2}$ 的定义域是 ( )

(A) $(3,+\infty)$ (B) $[3,+\infty)$ (C) $(4,+\infty)$ (D) $[4,+\infty)$

2. 若数列 $\{a_n\}$ 满足: $a_1=\dfrac{1}{3}$, 且对任意正整数 m, n 都有 $a_{m+n}=a_m\cdot a_n$, 则 $\lim\limits_{n\to+\infty}(a_1+a_2+\cdots+a_n)=$ ( )

(A) $\dfrac{1}{2}$ (B) $\dfrac{2}{3}$ (C) $\dfrac{3}{2}$ (D) 2

3. 过平行六面体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 任意两条棱的中点作直线, 其中与平面 DBB_1D_1 平行的直线共有 ( )

(A) 4 条 (B) 6 条 (C) 8 条 (D) 12 条

4. "$a=1$"是"函数 $f(x)=|x-a|$ 在区间 $[1,+\infty)$ 上为增函数"的 ( )

(A) 充分不必要条件 (B) 必要不充分条件

(C) 充要条件 (D) 既不充分也不必要条件

5. 已知 $|\vec{a}|=2\left|\vec{b}\right|\neq 0$, 且关于 x 的方程 $x^2+|\vec{a}|x+\vec{a}\cdot\vec{b}=0$ 有实根, 则 $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 的夹角的取值范围是 ( )

(A) $\left[0,\dfrac{\pi}{6}\right]$ (B) $\left[\dfrac{\pi}{3},\pi\right]$ (C) $\left[\dfrac{\pi}{3},\dfrac{2\pi}{3}\right]$ (D) $\left[\dfrac{\pi}{6},\pi\right]$

6. 某外商计划在 4 个候选城市投资 3 个不同的项目, 且在同一个城市投资的项目不超过 2 个, 则该外商不同的投资方案有 ( )

(A) 16 种 (B) 36 种 (C) 42 种 (D) 60 种

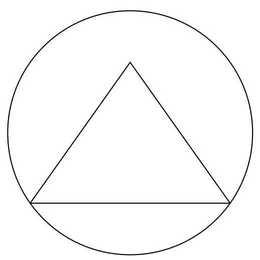
7. 过双曲线 $M: x^2-\dfrac{y^2}{b^2}=1$ 的左顶点 A 作斜率为 1 的直线 l, 若 l 与双曲线 M 的两条渐近线分别相交于点 B, C, 且 $|AB|=|BC|$, 则双曲线 M 的离心率是 ( )

(A) $\sqrt{10}$ (B) $\sqrt{5}$ (C) $\dfrac{\sqrt{10}}{3}$ (D) $\dfrac{\sqrt{5}}{2}$

8. 设函数 $f(x)=\dfrac{x-a}{x-1}$, 集合 $M=\{x\mid f(x)<0\}$, $P=\{x\mid f'(x)>0\}$, 若 $M\subsetneqq P$, 则实数 a 的取值范围是 ( )

(A) $(-\infty,1)$ (B) $(0,1)$ (C) $(1,+\infty)$ (D) $[1,+\infty)$

9. 棱长为 2 的正四面体的四个顶点都在同一个球面上, 若过该球球心的一个截面如图, 则图中三角形 (正四面体的截面) 的面积是 ( )



(A) $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ (B) $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ (C) $\sqrt{2}$ (D) $\sqrt{3}$

10. 若圆 $x^2+y^2-4x-4y-10=0$ 上至少有三个不同的点到直线 l: $ax+by=0$ 的距离为 $2\sqrt{2}$, 则直线 l 的倾斜角的取值范围是 ( )

(A) $\left[\dfrac{\pi}{12},\dfrac{\pi}{4}\right]$ (B) $\left[\dfrac{\pi}{12},\dfrac{5\pi}{12}\right]$ (C) $\left[\dfrac{\pi}{6},\dfrac{\pi}{3}\right]$ (D) $\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]$

二、填空题

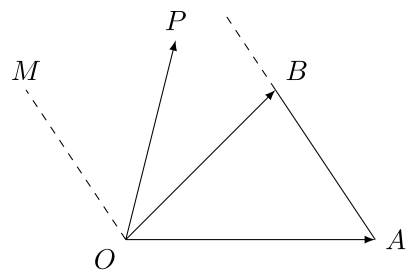
11. 若 $(ax-1)^5$ 的展开式中 x^3 的系数是 -80, 则实数 a 的值是______.

12. 已知 $\begin{cases} x\geqslant 1, \\ x-y+1\leqslant 0, \\ 2x-y-2\leqslant 0, \end{cases}$ 则 x^2+y^2 的最小值是______.

13. 曲线 $y=\dfrac{1}{x}$ 和 $y=x^2$ 在它们交点处的两条切线与 x 轴所围成的三角形的面积是______.

14. 若 $f(x)=a\sin\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right)+b\sin\left(x-\dfrac{\pi}{4}\right)$ $(ab\neq 0)$ 是偶函数, 则有序实数对 (a,b) 可以是______. (写出你认为正确的一组数字即可)

15. 如图, $OM\parallel AB$, 点 P 在由射线 OM、线段 OB 及 AB 的延长线围成的区域内 (不含边界) 运动, 且 $\overrightarrow{OP}=x\overrightarrow{OA}+y\overrightarrow{OB}$, 则 x 的取值范围是______; 当 $x=-\dfrac{1}{2}$ 时, y 的取值范围是______.

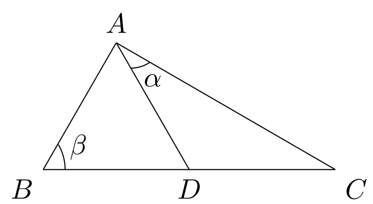


三、解答题

16. 如图, D 是直角 $\triangle ABC$ 斜边 BC 上一点, $AB=AD$, 记 $\angle CAD=\alpha$, $\angle ABC=\beta$.

(1) 证明: $\sin\alpha+\cos 2\beta=0$;

(2) 若 $AC=\sqrt{3}DC$, 求 β 的值.



17. 某安全生产监督部门对 5 家小型煤矿进行安全检查 (简称安检). 若安检不合格, 则必须整改. 若整改后经复查仍不合格, 则强制关闭. 设每家煤矿安检是否合格是相互独立的, 且每家煤矿整改前安检合格的概率是 0.5, 整改后安检合格的概率是 0.8, 计算 (结果精确到 0.01):

(1) 恰好有两家煤矿必须整改的概率;

(2) 平均有多少家煤矿必须整改;

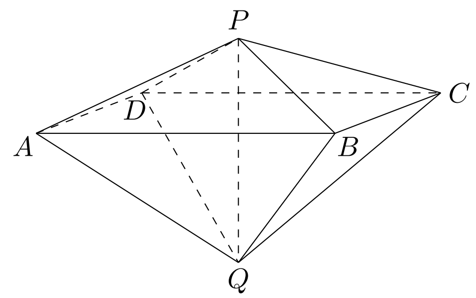
(3) 至少关闭一家煤矿的概率.

18. 如图, 已知两个正四棱锥 $P-ABCD$ 与 $Q-ABCD$ 的高分别为 1 和 2, $AB=4$.

(1) 证明: $PQ\perp$ 平面 $ABCD$;

(2) 求异面直线 AQ 与 PB 所成的角;

(3) 求点 P 到平面 QAD 的距离.



19. 已知函数 $f(x)=x-\sin x$, 数列 $\{a_n\}$ 满足: $0<a_1<1$, $a_{n+1}=f(a_n)$, $n=1, 2, 3, \cdots$. 证明:

(1) $0<a_{n+1}<a_n<1$;

(2) $a_{n+1}<\frac{1}{6}{a_n}^3$.

20. 对 1 个单位质量的含污物体进行清洗, 清洗前其清洁度 (含污物体的清洁度定义为: $1-\dfrac{\text{污物质量}}{\text{物体质量 (含污物)}}$) 为 0.8, 要求洗完后的清洁度是 0.99. 有两种方案可供选择, 方案甲: 一次清洗; 方案乙: 两次清洗. 该物体初次清洗后受残留水等因素影响, 其质量变为 a $(1\leqslant a\leqslant 3)$. 设用 x 单位质量的水初次清洗后的清洁度是 $\dfrac{x+0.8}{x+1}$ $(x>a-1)$, 用 y 单位质量的水第二次清洗后的清洁度是 $\dfrac{y+ac}{y+a}$, 其中 c $(0.8<c<0.99)$ 是该物体初次清洗后的清洁度.

(1) 分别求出方案甲以及 $c=0.95$ 时方案乙的用水量, 并比较哪一种方案用水量较少;

(2) 若采用方案乙, 当 a 为某定值时, 如何安排初次与第二次清洗的用水量, 使总用水量最少? 并讨论 a 取不同数值时对最少总用水量多少的影响.

21. 已知椭圆 C_1: $\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{3}=1$, 抛物线 C_2: $(y-m)^2=2px$ $(p>0)$, 且 C_1、C_2 的公共弦 AB 过椭圆 C_1 的右焦点.

(1) 当 $AB\perp x$ 轴时, 求 m、p 的值, 并判断抛物线 C_2 的焦点是否在直线 AB 上;

(2) 是否存在 m、p 的值, 使抛物线 C_2 的焦点恰在直线 AB 上? 若存在, 求出符合条件的 m、p 的值; 若不存在, 请说明理由.