

2006 普通高等学校招生考试 (福建卷理)

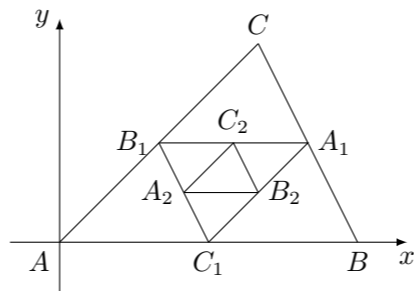
一、选择题

1. 设 $a, b, c, d \in \mathbf{R}$, 则复数 $(a+bi)(c+di)$ 为实数的充要条件是 ()
 (A) $ad-bc=0$ (B) $ac-bd=0$ (C) $ac+bd=0$ (D) $ad+bc=0$
2. 在等差数列 $\{a_n\}$ 中, 已知 $a_1=2, a_2+a_3=13$, 则 $a_4+a_5+a_6$ 等于 ()
 (A) 40 (B) 42 (C) 43 (D) 45
3. 已知 $\alpha \in (\frac{\pi}{2}, \pi)$, $\sin \alpha = \frac{3}{5}$, 则 $\tan(\alpha + \frac{\pi}{4})$ 等于 ()
 (A) $\frac{1}{7}$ (B) 7 (C) $-\frac{1}{7}$ (D) -7
4. 已知全集 $U = \mathbf{R}$, 且 $A = \{x \mid |x-1| > 2\}$, $B = \{x \mid x^2 - 6x + 8 < 0\}$, 则 $(\complement_U A) \cap B$ 等于 ()
 (A) $[-1, 4)$ (B) $(2, 3)$ (C) $(2, 3]$ (D) $(-1, 4)$
5. 已知正方体外接球的体积是 $\frac{32}{3}\pi$, 那么正方体的棱长等于 ()
 (A) $2\sqrt{2}$ (B) $\frac{2\sqrt{3}}{3}$ (C) $\frac{4\sqrt{2}}{3}$ (D) $\frac{4\sqrt{3}}{3}$
6. 在一个口袋中装有 5 个白球和 3 个黑球, 这些球除颜色外完全相同, 从中摸出 3 个球, 至少摸到 2 个黑球的概率等于 ()
 (A) $\frac{2}{7}$ (B) $\frac{3}{8}$ (C) $\frac{3}{7}$ (D) $\frac{9}{28}$
7. 对于平面 α 和共面的直线 m, n , 下列命题中真命题是 ()
 (A) 若 $m \perp \alpha, m \perp n$, 则 $n \parallel \alpha$
 (B) 若 $m \parallel \alpha, n \parallel \alpha$, 则 $m \parallel n$
 (C) 若 $m \subset \alpha, n \parallel \alpha$, 则 $m \parallel n$
 (D) 若 m, n 与 α 所成的角相等, 则 $m \parallel n$
8. 函数 $y = \log_2 \frac{x}{x-1} (x > 1)$ 的反函数是 ()
 (A) $y = \frac{2^x}{2^x-1} (x > 0)$ (B) $y = \frac{2^x}{2^x-1} (x < 0)$
 (C) $y = \frac{2^x-1}{2^x} (x > 0)$ (D) $y = \frac{2^x-1}{2^x} (x < 0)$
9. 已知函数 $f(x) = 2\sin \omega x (\omega > 0)$ 在区间 $[-\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{4}]$ 上的最小值是 -2, 则 ω 的最小值等于 ()
 (A) $\frac{2}{3}$ (B) $\frac{3}{2}$ (C) 2 (D) 3
10. 已知双曲线 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$ 的右焦点为 F , 若过点 F 且倾斜角为 60° 的直线与双曲线的右支有且只有一个交点, 则此双曲线离心率的取值范围是 ()
 (A) $(1, 2]$ (B) $(1, 2)$ (C) $[2, +\infty)$ (D) $(2, +\infty)$

11. 已知 $|\vec{OA}| = 1, |\vec{OB}| = \sqrt{3}, \vec{OA} \cdot \vec{OB} = 0$, 点 C 在 $\angle AOB$ 内, 且 $\angle AOC = 30^\circ$. 设 $\vec{OC} = m\vec{OA} + n\vec{OB} (m, n \in \mathbf{R})$, 则 $\frac{m}{n}$ 等于 ()
 (A) $\frac{1}{3}$ (B) 3 (C) $\frac{\sqrt{3}}{3}$ (D) $\sqrt{3}$
12. 对于直角坐标平面内的任意两点 $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$, 定义它们之间的一种“距离”: $\|AB\| = |x_2 - x_1| + |y_2 - y_1|$. 给出下列三个命题:
 ① 若点 C 在线段 AB 上, 则 $\|AC\| + \|CB\| = \|AB\|$;
 ② 在 $\triangle ABC$ 中, 若 $\angle C = 90^\circ$, 则 $\|AC\|^2 + \|CB\|^2 = \|AB\|^2$;
 ③ 在 $\triangle ABC$ 中, $\|AC\| + \|CB\| > \|AB\|$.
 其中真命题的个数为 ()
 (A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 4

二、填空题

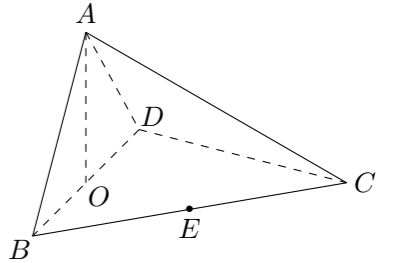
13. $(x^2 - \frac{1}{x})^5$ 展开式中 x^4 的系数是_____. (用数字作答)
14. 已知直线 $x - y - 1 = 0$ 与抛物线 $y = ax^2$ 相切, 则 $a =$ _____.
15. 一个均匀小正方体的六个面中, 三个面上标以数 0, 两个面上标以数 1, 一个面上标以数 2. 将这个小正方体抛掷 2 次, 则向上的数之积的数学期望是_____.
16. 如图, 连结 $\triangle ABC$ 的各边中点得到一个新的 $\triangle A_1B_1C_1$, 又连结 $\triangle A_1B_1C_1$ 的各边中点得到一个新的 $\triangle A_2B_2C_2$, 如此无限继续下去, 得到一系列三角形: $\triangle ABC, \triangle A_1B_1C_1, \triangle A_2B_2C_2, \dots$, 这一系列三角形趋向于一个点 M . 已知 $A(0, 0), B(3, 0), C(2, 2)$, 则点 M 的坐标是_____.



三、解答题

17. 已知函数 $f(x) = \sin^2 x + \sqrt{3} \sin x \cos x + 2 \cos^2 x, x \in \mathbf{R}$.
 (1) 求函数 $f(x)$ 的最小正周期和单调增区间;
 (2) 函数 $f(x)$ 的图象可以由函数 $y = \sin 2x (x \in \mathbf{R})$ 的图象经过怎样的变换得到?

18. 如图, 四面体 $ABCD$ 中, O, E 分别是 BD, BC 的中点, $CA = CB = CD = BD = 2, AB = AD = \sqrt{2}$.
 (1) 求证: $AO \perp$ 平面 BCD ;
 (2) 求异面直线 AB 与 CD 所成角的大小;
 (3) 求点 E 到平面 ACD 的距离.

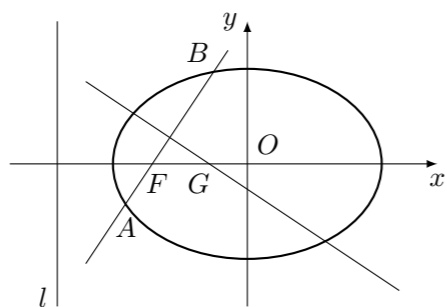


19. 统计表明, 某种型号的汽车在匀速行驶中每小时的耗油量 y (升) 关于行驶速度 x (千米/小时) 的函数解析式可以表示为: $y = \frac{1}{128000}x^3 - \frac{3}{80}x + 8 (0 < x \leq 120)$. 已知甲、乙两地相距 100 千米.
 (1) 当汽车以 40 千米/小时的速度匀速行驶时, 从甲地到乙地要耗油多少升?
 (2) 当汽车以多大的速度匀速行驶时, 从甲地到乙地耗油最少? 最少为多少升?

20. 已知椭圆 $\frac{x^2}{2} + y^2 = 1$ 的左焦点为 F , O 为坐标原点.

(1) 求过点 O 、 F , 并且与椭圆的左准线 l 相切的圆的方程;

(2) 设过点 F 且不与坐标轴垂直的直线交椭圆于 A 、 B 两点, 线段 AB 的垂直平分线与 x 轴交于点 G , 求点 G 横坐标的取值范围.



21. 已知函数 $f(x) = -x^2 + 8x$, $g(x) = 6 \ln x + m$.

(1) 求 $f(x)$ 在区间 $[t, t+1]$ 上的最大值 $h(t)$;

(2) 是否存在实数 m , 使得 $y = f(x)$ 的图象与 $y = g(x)$ 的图象有且只有三个不同的交点? 若存在, 求出 m 的取值范围; 若不存在, 说明理由.

22. 已知数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1 = 1$, $a_{n+1} = 2a_n + 1$ ($n \in \mathbf{N}^*$).

(1) 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式;

(2) 若数列 $\{b_n\}$ 满足 $4^{b_1-1} 4^{b_2-1} 4^{b_3-1} \dots 4^{b_n-1} = (a_n + 1)^{b_n}$ ($n \in \mathbf{N}^*$), 证明 $\{b_n\}$ 是等差数列;

(3) 证明: $\frac{n}{2} - \frac{1}{3} < \frac{a_1}{a_2} + \frac{a_2}{a_3} + \dots + \frac{a_n}{a_{n+1}} < \frac{n}{2}$ ($n \in \mathbf{N}^*$).