

## 2006 普通高等学校招生考试 (辽宁卷理)

### 一、选择题

1. 设集合  $A = \{1, 2\}$ , 则满足  $A \cup B = \{1, 2, 3\}$  的集合  $B$  的个数是 ( )  
(A) 1 (B) 3 (C) 4 (D) 8
2. 设  $f(x)$  是  $\mathbf{R}$  上的任意函数, 则下列叙述正确的是 ( )  
(A)  $f(x)f(-x)$  是奇函数 (B)  $f(x)|f(-x)|$  是奇函数  
(C)  $f(x) - f(-x)$  是偶函数 (D)  $f(x) + f(-x)$  是偶函数
3. 给出下列四个命题:  
① 垂直于同一直线的两条直线互相平行;  
② 垂直于同一平面的两个平面互相平行;  
③ 若直线  $l_1, l_2$  与同一平面所成的角相等, 则  $l_1, l_2$  互相平行;  
④ 若直线  $l_1, l_2$  是异面直线, 则与  $l_1, l_2$  都相交的两条直线是异面直线.  
其中假命题的个数是 ( )  
(A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 4
4. 双曲线  $x^2 - y^2 = 4$  的两条渐近线与直线  $x = 3$  围成一个三角形区域, 表示该区域的不等式组是 ( )  
(A)  $\begin{cases} x - y \geq 0, \\ x + y \geq 0, \\ 0 \leq x \leq 3. \end{cases}$  (B)  $\begin{cases} x - y \geq 0, \\ x + y \leq 0, \\ 0 \leq x \leq 3. \end{cases}$  (C)  $\begin{cases} x - y \leq 0, \\ x + y \leq 0, \\ 0 \leq x \leq 3. \end{cases}$  (D)  $\begin{cases} x - y \leq 0, \\ x + y \geq 3, \\ 0 \leq x \leq 3. \end{cases}$
5. 设  $\oplus$  是  $\mathbf{R}$  上的一个运算,  $A$  是  $\mathbf{R}$  的非空子集, 若对任意  $a, b \in A$ , 有  $a \oplus b \in A$ , 则称  $A$  对运算  $\oplus$  封闭. 下列数集对加法、减法、乘法和除法 (除数不等于零) 四则运算都封闭的是 ( )  
(A) 自然数集 (B) 整数集 (C) 有理数集 (D) 无理数集
6.  $\triangle ABC$  的三内角  $A, B, C$ , 所对边的长分别为  $a, b, c$ , 设向量  $\vec{p} = (a+c, b)$ ,  $\vec{q} = (b-a, c-a)$ . 若  $\vec{p} \parallel \vec{q}$ , 则角  $C$  的大小为 ( )  
(A)  $\frac{\pi}{6}$  (B)  $\frac{\pi}{3}$  (C)  $\frac{\pi}{2}$  (D)  $\frac{2\pi}{3}$
7. 与方程  $y = e^{2x} - 2e^x + 1 (x \geq 0)$  的曲线关于直线  $y = x$  对称的曲线方程为 ( )  
(A)  $y = \ln(1 + \sqrt{x})$  (B)  $y = \ln(1 - \sqrt{x})$   
(C)  $y = -\ln(1 + \sqrt{x})$  (D)  $y = -\ln(1 - \sqrt{x})$
8. 曲线  $\frac{x^2}{10-m} + \frac{y^2}{6-m} = 1 (m < 6)$  与曲线  $\frac{x^2}{5-n} + \frac{y^2}{9-n} = 1 (5 < n < 9)$  的 ( )  
(A) 焦距相等 (B) 离心率相等 (C) 焦点相同 (D) 准线相同
9. 在等比数列  $\{a_n\}$  中,  $a_1 = 2$ , 前  $n$  项和为  $S_n$ , 若数列  $\{a_n + 1\}$  也是等比数列, 则  $S_n$  等于 ( )  
(A)  $2^{n+1} - 2$  (B)  $3n$  (C)  $2n$  (D)  $3^n - 1$

10. 直线  $y = 2k$  与曲线  $9k^2x^2 + y^2 = 18k^2|x| (k \in \mathbf{R}, \text{且 } k \neq 0)$  的公共点的个数为 ( )  
(A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 4
11. 已知函数  $f(x) = \frac{1}{2}(\sin x + \cos x) - \frac{1}{2}|\sin x - \cos x|$ , 则  $f(x)$  的值域是 ( )  
(A)  $[-1, 1]$  (B)  $\left[-\frac{\sqrt{2}}{2}, 1\right]$  (C)  $\left[-1, \frac{\sqrt{2}}{2}\right]$  (D)  $\left[-1, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right]$
12. 设  $O(0,0), A(1,0), B(0,1)$ , 点  $P$  是线段  $AB$  上的一个动点,  $\vec{AP} = \lambda\vec{AB}$ , 若  $\vec{OP} \cdot \vec{AB} \geq \vec{PA} \cdot \vec{PB}$ , 则实数  $\lambda$  的取值范围是 ( )  
(A)  $\frac{1}{2} \leq \lambda \leq 1$  (B)  $1 - \frac{\sqrt{2}}{2} \leq \lambda \leq 1$   
(C)  $\frac{1}{2} \leq \lambda \leq 1 + \frac{\sqrt{2}}{2}$  (D)  $1 - \frac{\sqrt{2}}{2} \leq \lambda \leq 1 + \frac{\sqrt{2}}{2}$

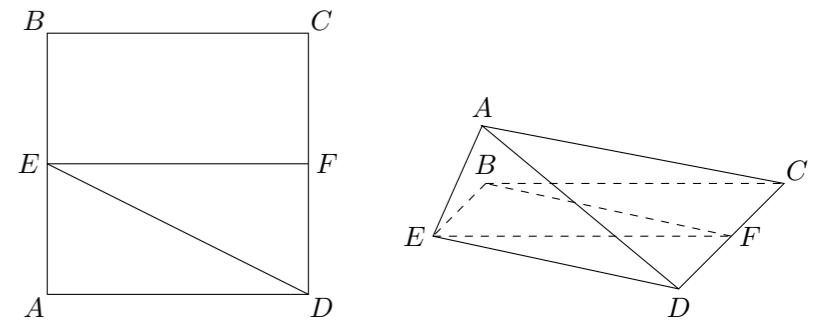
### 二、填空题

13. 设  $g(x) = \begin{cases} e^x, & x \leq 0, \\ \ln x, & x > 0, \end{cases}$  则  $g\left(g\left(\frac{1}{2}\right)\right) = \underline{\hspace{2cm}}$ .
14.  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\left(\frac{4}{5} - \frac{6}{7}\right) + \left(\frac{4}{5^2} - \frac{6}{7^2}\right) + \cdots + \left(\frac{4}{5^n} - \frac{6}{7^n}\right)}{\left(\frac{5}{6} - \frac{4}{5}\right) + \left(\frac{5}{6^2} - \frac{4}{5^2}\right) + \cdots + \left(\frac{5}{6^n} - \frac{4}{5^n}\right)} = \underline{\hspace{2cm}}$ .
15. 5 名乒乓球队员中, 有 2 名老队员和 3 名新队员. 现从中选出 3 名队员排成 1、2、3 号参加团体比赛, 则入选的 3 名队员中至少有 1 名老队员, 且 1、2 号中至少有 1 名新队员的排列方法有          种. (以数作答)
16. 若一条直线与一个正四棱柱各个面所成的角都为  $\alpha$ , 则  $\cos \alpha = \underline{\hspace{2cm}}$ .

### 三、解答题

17. 已知函数  $f(x) = \sin^2 x + 2 \sin x \cos x + 3 \cos^2 x, x \in \mathbf{R}$ . 求:  
(1) 函数  $f(x)$  的最大值及取得最大值的自变量  $x$  的集合;  
(2) 函数  $f(x)$  的单调增区间.

18. 已知正方形  $ABCD$ ,  $E, F$  分别是边  $AB, CD$  的中点, 将  $\triangle ADE$  沿  $DE$  折起, 如图所示, 记二面角  $A-DE-C$  的大小为  $\theta (0 < \theta < \pi)$ .  
(1) 证明:  $BF \parallel$  平面  $ADE$ ;  
(2) 若  $\triangle ACD$  为正三角形, 试判断点  $A$  在平面  $BCDE$  内的射影  $G$  是否在直线  $EF$  上, 证明你的结论, 并求角  $\theta$  的余弦值.



19. 现有甲、乙两个项目, 对甲项目每投资十万元, 一年后利润是 1.2 万元、1.18 万元、1.17 万元的概率分别为  $\frac{1}{6}, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}$ ; 已知乙项目的利润与产品价格的调整有关, 在每次调整中, 价格下降的概率都是  $p (0 < p < 1)$ , 设乙项目产品在一年内进行 2 次独立的调整, 记乙项目产品在一年内的下降次数为  $\xi$ , 对乙项目每投资十万元,  $\xi$  取 0、1、2 时, 一年后相应利润是 1.3 万元、1.25 万元、0.2 万元. 随机变量  $\xi_1, \xi_2$  分别表示对甲、乙两项目各投资十万元一年后的利润.  
(1) 求  $\xi_1, \xi_2$  的概率分布和数学期望  $E\xi_1, E\xi_2$ ;  
(2) 当  $E\xi_1 < E\xi_2$  时, 求  $p$  的取值范围.

20. 已知点  $A(x_1, y_1)$ 、 $B(x_2, y_2)$  ( $x_1, x_2 \neq 0$ ) 是抛物线  $y^2 = 2px$  ( $p > 0$ ) 上的两个动点,  $O$  是坐标原点, 向量  $\vec{OA}$ 、 $\vec{OB}$  满足  $|\vec{OA} + \vec{OB}| = |\vec{OA} - \vec{OB}|$ . 设圆  $C$  的方程为  $x^2 + y^2 - (x_1 + x_2)x - (y_1 + y_2)y = 0$ .
- (1) 证明线段  $AB$  是圆  $C$  的直径;
  - (2) 当圆  $C$  的圆心到直线  $x - 2y = 0$  的距离的最小值为  $\frac{2\sqrt{5}}{5}$  时, 求  $p$  的值.
21. 已知函数  $f(x) = \frac{1}{3}ax^3 + bx^2 + cx + d$ , 其中  $a, b, c$  是以  $d$  为公差的等差数列, 且  $a > 0, d > 0$ . 设  $x_0$  为  $f(x)$  的极小值点. 在  $\left[1 - \frac{2b}{a}, 0\right]$  上,  $f'(x)$  在  $x_1$  处取得最大值, 在  $x_2$  处取得最小值. 将  $(x_0, f(x_0))$ ,  $(x_1, f'(x_1))$ ,  $(x_2, f'(x_2))$  依次记为  $A, B, C$ .
- (1) 求  $x_0$ ;
  - (2) 若  $\triangle ABC$  有一边平行于  $x$  轴, 且面积为  $2 + \sqrt{3}$ , 求  $a, d$  的值.
22. 已知  $f_0(x) = x^n, f_k(x) = \frac{f_{k-1}'(x)}{f_{k-1}'(1)}$ , 其中  $k \leq n$  ( $n, k \in \mathbf{N}_+$ ), 设  $F(x) = C_n^0 f_0(x^2) + C_n^1 f_1(x^2) + \cdots + C_n^n f_n(x^2), x \in [-1, 1]$ .
- (1) 写出  $f_k(1)$ ;
  - (2) 证明: 对任意的  $x_1, x_2 \in [-1, 1]$ , 恒有  $|F(x_1) - F(x_2)| \leq 2^{n-1}(n+2) - n - 1$ .