

2007 普通高等学校招生考试 (北京卷理)

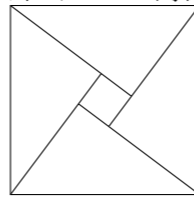
一、选择题

- 已知 $\cos \theta \cdot \tan \theta < 0$, 那么角 θ 是 ()
 (A) 第一或第二象限角 (B) 第二或第三象限角
 (C) 第三或第四象限角 (D) 第一或第四象限角
- 函数 $f(x) = 3^x$ ($0 < x \leq 2$) 的反函数的定义域为 ()
 (A) $(0, +\infty)$ (B) $(1, 9]$ (C) $(0, 1)$ (D) $[9, +\infty)$
- 平面 $\alpha \parallel$ 平面 β 的一个充分条件是 ()
 (A) 存在一条直线 $a, a \parallel \alpha, a \parallel \beta$
 (B) 存在一条直线 $a, a \subset \alpha, a \parallel \beta$
 (C) 存在两条平行直线 $a, b, a \subset \alpha, b \subset \beta, a \parallel \beta, b \parallel \alpha$
 (D) 存在两条异面直线 $a, b, a \subset \alpha, b \subset \beta, a \parallel \beta, b \parallel \alpha$
- 已知 O 是 $\triangle ABC$ 所在平面内一点, D 为 BC 边中点, 且 $2\vec{OA} + \vec{OB} + \vec{OC} = \mathbf{0}$, 那么 ()
 (A) $\vec{AO} = \vec{OD}$ (B) $\vec{AO} = 2\vec{OD}$ (C) $\vec{AO} = 3\vec{OD}$ (D) $2\vec{AO} = \vec{OD}$
- 记者要为 5 名志愿者和他们帮助的 2 位老人拍照, 要求排成一排, 2 位老人相邻但不排在两端, 不同的排法共有 ()
 (A) 1440 种 (B) 960 种 (C) 720 种 (D) 480 种
- 若不等式组 $\begin{cases} x - y \geq 0, \\ 2x + y \leq 2, \\ y \geq 0, \\ x + y \leq a, \end{cases}$ 表示的平面区域是一个三角形, 则 a 的取值范围是 ()
 (A) $a \geq \frac{4}{3}$ (B) $0 < a \leq 1$
 (C) $1 \leq a \leq \frac{4}{3}$ (D) $0 < a \leq 1$ 或 $a \geq \frac{4}{3}$
- 如果正数 a, b, c, d 满足 $a + b = cd = 4$, 那么 ()
 (A) $ab \leq c + d$, 且等号成立时 a, b, c, d 的取值唯一
 (B) $ab \geq c + d$, 且等号成立时 a, b, c, d 的取值唯一
 (C) $ab \leq c + d$, 且等号成立时 a, b, c, d 的取值不唯一
 (D) $ab \geq c + d$, 且等号成立时 a, b, c, d 的取值不唯一
- 对于函数① $f(x) = \lg(|x - 2| + 1)$, ② $f(x) = (x - 2)^2$, ③ $f(x) = \cos(x + 2)$, 判断如下三个命题的真假:
 命题甲: $f(x + 2)$ 是偶函数;
 命题乙: $f(x)$ 在 $(-\infty, 2)$ 上是减函数, 在 $(2, +\infty)$ 上是增函数;
 命题丙: $f(x + 2) - f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上是增函数.
 能使命题甲、乙、丙均为真的所有函数的序号是 ()

- (A) ①③ (B) ①② (C) ③ (D) ②

二、填空题

- $\frac{2}{(1+i)^2} = \underline{\hspace{2cm}}$.
- 若数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和 $S_n = n^2 - 10n$ ($n = 1, 2, 3, \dots$), 则此数列的通项公式为 $\underline{\hspace{2cm}}$; 数列 $\{na_n\}$ 中数值最小的项是第 $\underline{\hspace{2cm}}$ 项.
- 在 $\triangle ABC$ 中, 若 $\tan A = \frac{1}{3}, C = 150^\circ, BC = 1$, 则 $AB = \underline{\hspace{2cm}}$.
- 已知集合 $A = \{x \mid |x - a| \leq 1\}, B = \{x \mid x^2 - 5x + 4 \geq 0\}$. 若 $A \cap B = \emptyset$, 则实数 a 的取值范围是 $\underline{\hspace{2cm}}$.
- 2002 年在北京召开的国际数学家大会, 会标是以我国古代数学家赵爽的弦图为基础设计的. 弦图是由四个全等直角三角形与一个小正方形拼成的大正方形 (如图). 如果小正方形的面积为 1, 大正方形的面积为 25, 直角三角形中较小的锐角为 θ , 那么 $\cos 2\theta$ 的值等于 $\underline{\hspace{2cm}}$.



14. 已知函数 $f(x), g(x)$ 分别由下表给出

x	1	2	3
$f(x)$	1	3	1

x	1	2	3
$g(x)$	3	2	1

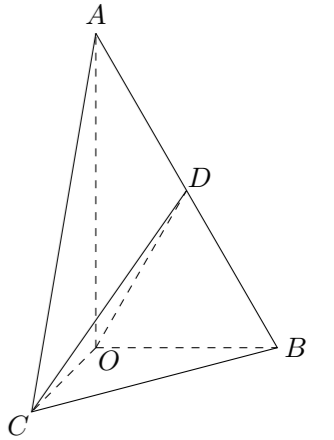
则 $f[g(1)]$ 的值为 $\underline{\hspace{2cm}}$; 满足 $f[g(x)] > g[f(x)]$ 的 x 的值是 $\underline{\hspace{2cm}}$.

三、解答题

- 数列 $\{a_n\}$ 中, $a_1 = 2, a_{n+1} = a_n + cn$ (c 是常数, $n = 1, 2, 3, \dots$), 且 a_1, a_2, a_3 成公比不为 1 的等比数列.
 (1) 求 c 的值;
 (2) 求 $\{a_n\}$ 的通项公式.

16. 如图, 在 $\text{Rt}\triangle AOB$ 中, $\angle OAB = \frac{\pi}{6}$, 斜边 $AB = 4$. $\text{Rt}\triangle AOC$ 可以通过 $\text{Rt}\triangle AOB$ 以直线 AO 为轴旋转得到, 且二面角 $B - AO - C$ 是直二面角. 动点 D 的斜边 AB 上.

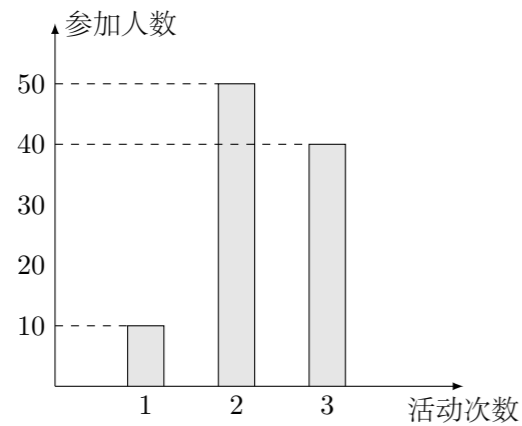
- 求证: 平面 $COD \perp$ 平面 AOB ;
- 当 D 为 AB 的中点时, 求异面直线 AO 与 CD 所成角的大小;
- 求 CD 与平面 AOB 所成角的最大值.



17. 矩形 $ABCD$ 的两条对角线相交于点 $M(2, 0)$, AB 边所在直线的方程为 $x - 3y - 6 = 0$, 点 $T(-1, 1)$ 在 AD 边所在直线上.

- 求 AD 边所在直线的方程;
- 求矩形 $ABCD$ 外接圆的方程;
- 若动圆 P 过点 $N(-2, 0)$, 且与矩形 $ABCD$ 的外接圆外切, 求动圆 P 的圆心的轨迹方程.

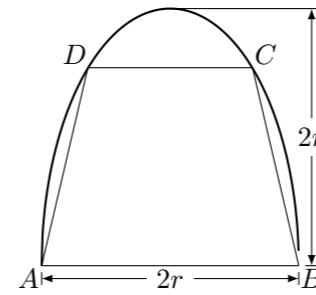
18. 某中学号召学生在今年春节期间至少参加一次社会公益活动 (以下简称活动). 该校合唱团共有 100 名学生, 他们参加活动的次数统计如图所示.



- 求合唱团学生参加活动的人均次数;
- 从合唱团中任意选两名学生, 求他们参加活动次数恰好相等的概率;
- 从合唱团中任选两名学生, 用 ξ 表示这两人参加活动次数之差的绝对值, 求随机变量 ξ 的分布列及数学期望 $E\xi$.

19. 如图, 有一块半椭圆形钢板, 其半轴长为 $2r$, 短半轴长为 r , 计划将此钢板切割成等腰梯形的形状, 下底 AB 是半椭圆的短轴, 上底 CD 的端点在椭圆上, 记 $CD = 2x$, 梯形面积为 S .

- 求面积 S 以 x 为自变量的函数式, 并写出其定义域;
- 求面积 S 的最大值.



20. 已知集合 $A = \{a_1, a_2, \dots, a_k\}$ ($k \geq 2$), 其中 $a_i \in \mathbf{Z}$ ($i = 1, 2, \dots, k$). 由 A 中的元素构成两个相应的集合: $S = \{(a, b) \mid a \in A, b \in A, a + b \in A\}$; $T = \{(a, b) \mid a \in A, b \in A, a - b \in A\}$, 其中 (a, b) 是有序数对, 集合 S 和 T 中的元素个数分别为 m 和 n . 若对于任意的 $a \in A$, 总有 $-a \notin A$, 则称集合 A 具有性质 P .

- 检验集合 $\{0, 1, 2, 3\}$ 与 $\{-1, 2, 3\}$ 是否具有性质 P , 并对其中具有性质 P 的集合, 写出相应的集合 S 和 T ;
- 对任何具有性质 P 的集合 A , 证明: $n \leq \frac{k(k-1)}{2}$;
- 判断 m 和 n 的大小关系, 并证明你的结论.