

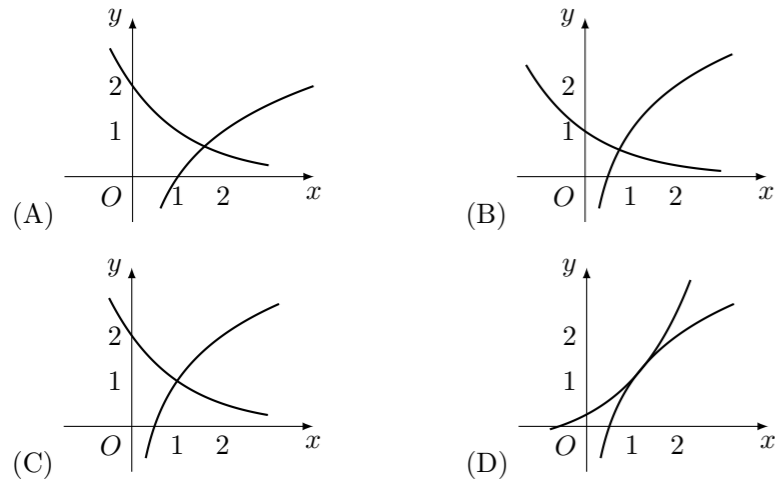
2007 普通高等学校招生考试 (四川卷理)

一、选择题

1. 复数  $\frac{1+i}{1-i} + i^3$  的值是 ( )

- (A) 0 (B) 1 (C) -1 (D) 1

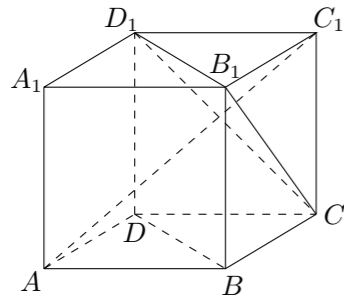
2. 函数  $f(x) = 1 + \log_2 x$  与  $g(x) = 2^{-x+1}$  在同一直角坐标系下的图象大致是 ( )



3.  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{2x^2 - x - 1} =$  ( )

- (A) 0 (B) 1 (C)  $\frac{1}{2}$  (D)  $\frac{2}{3}$

4. 如图,  $ABCD - A_1B_1C_1D_1$  为正方体, 下面结论错误的是 ( )

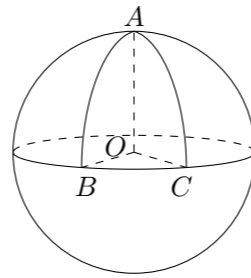


- (A)  $BD \parallel$  平面  $CB_1D_1$  (B)  $AC_1 \perp BD$   
(C)  $AC_1 \perp$  平面  $CB_1D_1$  (D) 异面直线  $AD$  与  $CB_1$  角为  $60^\circ$

5. 如果双曲线  $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{2} = 1$  上一点  $P$  到双曲线右焦点的距离是 2, 那么点  $P$  到  $y$  轴的距离是 ( )

- (A)  $\frac{4\sqrt{6}}{3}$  (B)  $\frac{2\sqrt{6}}{3}$  (C)  $2\sqrt{6}$  (D)  $2\sqrt{3}$

6. 设球  $O$  的半径是 1,  $A, B, C$  是球面上三点, 已知  $A$  到  $B, C$  两点的球面距离都是  $\frac{\pi}{2}$ , 且二面角  $B - OA - C$  的大小为  $\frac{\pi}{3}$ , 则从  $A$  点沿球面经  $B, C$  两点再回到  $A$  点的最短距离是 ( )



- (A)  $\frac{7\pi}{6}$  (B)  $\frac{5\pi}{4}$  (C)  $\frac{4\pi}{3}$  (D)  $\frac{3\pi}{2}$

7. 设  $A(a, 1), B(2, b), C(4, 5)$  为坐标平面上三点,  $O$  为坐标原点, 若  $\vec{OA}$  与  $\vec{OB}$  在  $\vec{OC}$  上的投影相同, 则  $a$  与  $b$  满足的关系式为 ( )

- (A)  $4a - 5b = 3$  (B)  $5a - 4b = 3$  (C)  $4a + 5b = 14$  (D)  $5a + 4b = 14$

8. 已知抛物线  $y = -x^2 + 3$  上存在关于直线  $x + y = 0$  对称的相异两点  $A, B$ , 则  $|AB|$  等于 ( )

- (A) 3 (B) 4 (C)  $3\sqrt{2}$  (D)  $4\sqrt{2}$

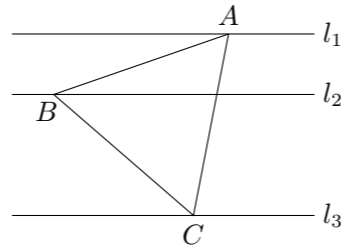
9. 某公司有 60 万元资金, 计划投资甲、乙两个项目, 按要求对项目甲的投资不小于对项目乙投资的  $\frac{2}{3}$  倍, 且对每个项目的投资不能低于 5 万元, 对项目甲每投资 1 万元可获得 0.4 万元的利润, 对项目乙每投资 1 万元可获得 0.6 万元的利润, 该公司正确规划投资后, 在这两个项目上共可获得的最大利润为 ( )

- (A) 36 万元 (B) 31.2 万元 (C) 30.4 万元 (D) 24 万元

10. 用数字 0, 1, 2, 3, 4, 5 可以组成没有重复数字, 并且比 20000 大的五位偶数共有 ( )

- (A) 288 个 (B) 240 个 (C) 144 个 (D) 126 个

11. 如图,  $l_1, l_2, l_3$  是同一平面内的三条平行直线,  $l_1$  与  $l_2$  间的距离是 1,  $l_2$  与  $l_3$  间的距离是 2, 正三角形  $ABC$  的三顶点分别在  $l_1, l_2, l_3$  上, 则  $\triangle ABC$  的边长是 ( )



- (A)  $2\sqrt{3}$  (B)  $\frac{4\sqrt{6}}{3}$  (C)  $\frac{3 - \sqrt{7}}{4}$  (D)  $\frac{2 - \sqrt{21}}{3}$

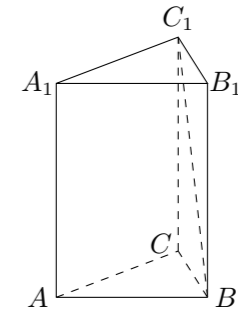
12. 已知一组抛物线  $y = \frac{1}{2}ax^2 + bx + 1$ , 其中  $a$  为 2, 4, 6, 8 中任取的一个数,  $b$  为 1, 3, 5, 7 中任取的一个数, 从这些抛物线中任意抽取两条, 它们在与直线  $x = 1$  交点处的切线相互平行的概率是 ( )

- (A)  $\frac{1}{12}$  (B)  $\frac{7}{60}$  (C)  $\frac{6}{25}$  (D)  $\frac{5}{25}$

二、填空题

13. 若函数  $f(x) = e^{-(x-u)^2}$  ( $e$  是自然对数的底数) 的最大值是  $m$ , 且  $f(x)$  是偶函数, 则  $m + u =$  \_\_\_\_\_.

14. 如图, 在正三棱柱  $ABC - A_1B_1C_1$  中, 侧棱长为  $\sqrt{2}$ , 底面三角形的边长为 1, 则  $BC_1$  与侧面  $ACC_1A_1$  所成的角是 \_\_\_\_\_.



15. 已知  $\odot O$  的方程是  $x^2 + y^2 - 2 = 0$ ,  $\odot O'$  的方程是  $x^2 + y^2 - 8x + 10 = 0$ , 由动点  $P$  向  $\odot O$  和  $\odot O'$  所引的切线长相等, 则动点  $P$  的轨迹方程是 \_\_\_\_\_.

16. 下面有五个命题:

- ① 函数  $y = \sin^4 x - \cos^4 x$  的最小正周期是  $\pi$ ;
  - ② 终边在  $y$  轴上的角的集合是  $\left\{ \alpha \mid \alpha = \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbf{Z} \right\}$ ;
  - ③ 在同一坐标系中, 函数  $y = \sin x$  的图象和函数  $y = x$  的图象有三个公共点;
  - ④ 把函数  $y = 3 \sin\left(2x + \frac{\pi}{3}\right)$  的图象向右平移  $\frac{\pi}{6}$  得到  $y = 3 \sin 2x$  的图象;
  - ⑤ 函数  $y = \sin\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$  在  $[0, \pi]$  上是减函数.
- 其中真命题的序号是 \_\_\_\_\_ (写出所有)

三、解答题

17. 已知  $\cos \alpha = \frac{1}{7}$ ,  $\cos(\alpha - \beta) = \frac{13}{14}$ , 且  $0 < \beta < \alpha < \frac{\pi}{2}$ .

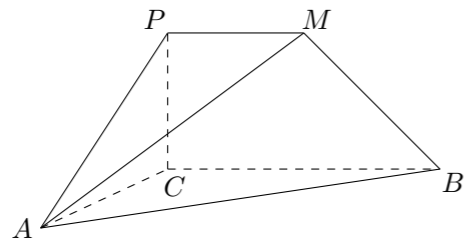
- (1) 求  $\tan 2\alpha$  的值;  
(2) 求  $\beta$ .

18. 厂家在产品出厂前,需对产品做检验,厂家将一批产品发给商家时,商家按合同规定也需随机抽取一定数量的产品做检验,以决定是否接收这批产品.
- (1) 若厂家库房中的每件产品合格的概率为 0.8,从中任意取出 4 件进行检验.求至少有 1 件是合格品的概率;
- (2) 若厂家发给商家 20 件产品,其中有 3 件不合格,按合同规定该商家从中任取 2 件,都进行检验,只有 2 件都合格时才接收这批产品,否则拒收.求该商家可能检验出不合格产品数  $\xi$  的分布列及期望  $E\xi$ ,并求该商家拒收这批产品的概率.

20. 设  $F_1, F_2$  分别是椭圆  $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$  的左、右焦点.
- (1) 若  $P$  是该椭圆上的一个动点,求  $\overrightarrow{PF_1} \cdot \overrightarrow{PF_2}$  的最大值和最小值;
- (2) 设过定点  $M(0, 2)$  的直线  $l$  与椭圆交于不同的两点  $A, B$ ,且  $\angle AOB$  为锐角(其中  $O$  为坐标原点),求直线  $l$  的斜率  $k$  的取值范围.

22. 设函数  $f(x) = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^x$  ( $n \in \mathbf{N}$ , 且  $n > 1, x \in \mathbf{R}$ ).
- (1) 当  $x = 6$  时,求  $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^x$  的展开式中二项式系数最大的项;
- (2) 对任意的实数  $x$ ,证明  $\frac{f(2x) + f(2)}{2} > f'(x)$  ( $f'(x)$  是  $f(x)$  的导函数);
- (3) 是否存在  $a \in \mathbf{N}$ ,使得  $an < \sum_{k=1}^n \left(1 + \frac{1}{k}\right)^k < (a+1)n$  恒成立? 若存在,试证明你的结论并求出  $a$  的值;若不存在,请说明理由.

19. 如图,  $PCBM$  是直角梯形,  $\angle PCB = 90^\circ$ ,  $PM \parallel BC$ ,  $PM = 1, BC = 2$ , 又  $AC = 1, \angle ACB = 120^\circ, AB \perp PC$ , 直线  $AM$  与直线  $PC$  所成的角为  $60^\circ$ .
- (1) 求证: 平面  $PAC \perp$  平面  $ABC$ ;
- (2) 求二面角  $M - AC - B$  的大小;
- (3) 求三棱锥  $P - MAC$  的体积.



21. 已知函数  $f(x) = x^2 - 4$ , 设曲线  $y = f(x)$  在点  $(x_n, f(x_n))$  处的切线与  $x$  轴的交点为  $(x_{n+1}, 0)$  ( $n \in \mathbf{N}^*$ ), 其中  $x_1$  为正实数.
- (1) 用  $x_n$  表示  $x_{n+1}$ ;
- (2) 求证: 对一切正整数  $n, x_{n+1} \leq x_n$  的充要条件是  $x_1 \geq 2$ ;
- (3) 若  $x_1 = 4$ , 记  $a_n = \lg \frac{x_n + 2}{x_n - 2}$ , 证明数列  $\{a_n\}$  成等比数列, 并求数列  $\{x_n\}$  的通项公式.