2007 普通高等学校招生考试 (天津卷理)

一、选择题

1. i 是虚数单位, $\dfrac{2\mathrm{i}^3}{1-\mathrm{i}}=$ ( )

(A) $1+\mathrm{i}$ (B) $-1+\mathrm{i}$ (C) $1-\mathrm{i}$ (D) $-1-\mathrm{i}$

2. 设变量 x, y 满足约束条件 $\begin{cases} x-y\geqslant -1, \\ x+y\geqslant 1, \\ 3x-y\leqslant 3, \end{cases}$ 则目标函数 $z=4x+y$ 的最大值为 ( )

(A) 4 (B) 11 (C) 12 (D) 14

3. “$\theta=\dfrac{2\pi}{3}$”是“$\tan\theta=2\cos\left(\dfrac{\pi}{2}+\theta\right)$”的 ( )

(A) 充分而不必要条件 (B) 必要而不充分条件

(C) 充分必要条件 (D) 既不充分也不必要条件

4. 设双曲线 $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$ $(a>0,\ b>0)$ 的离心率为 $\sqrt{3}$, 且它的一条准线与抛物线 $y^2=4x$ 的准线重合, 则此双曲线的方程为 ( )

(A) $\dfrac{x^2}{12}-\dfrac{y^2}{24}=1$ (B) $\dfrac{x^2}{48}-\dfrac{y^2}{96}=1$ (C) $\dfrac{x^2}{3}-\dfrac{2y^2}{3}=1$ (D) $\dfrac{x^2}{3}-\dfrac{y^2}{6}=1$

5. 函数 $y=\log_2(\sqrt{x+4}+2)$ $(x>0)$ 的反函数是 ( )

(A) $y=4^x-2^{x+1}$ $(x>2)$ (B) $y=4^x-2^{x+1}$ $(x>1)$

(C) $y=4^x-2^{x+2}$ $(x>2)$ (D) $y=4^x-2^{x+2}$ $(x>1)$

6. 设 a, b 为两条直线, α, β 为两个平面. 下列四个命题中, 正确的命题是( )

(A) 若 a, b 与 α 所成的角相等, 则 $a\parallel b$

(B) 若 $a\parallel\alpha$, $b\parallel\beta$, $\alpha\parallel\beta$, 则 $a\parallel b$

(C) 若 $a\subset\alpha$, $b\subset\beta$, $a\parallel b$, 则 $\alpha\parallel\beta$

(D) 若 $a\perp\alpha$, $b\perp\beta$, $\alpha\perp\beta$, 则 $a\perp b$

7. 在 $\mathbf{R}$ 上定义的函数 $f(x)$ 是偶函数, 且 $f(x)=f(2-x)$. 若 $f(x)$ 在区间 $[1,2]$ 上是减函数, 则 $f(x)$ ( )

(A) 在区间 $[-2,-1]$ 上是增函数, 在区间 $[3,4]$ 上是增函数

(B) 在区间 $[-2,-1]$ 上是增函数, 在区间 $[3,4]$ 上是减函数

(C) 在区间 $[-2,-1]$ 上是减函数, 在区间 $[3,4]$ 上是增函数

(D) 在区间 $[-2,-1]$ 上是减函数, 在区间 $[3,4]$ 上是减函数

8. 设等差数列 $\{a_n\}$ 的公差 d 不为 0, $a_1=9d$. 若 a_k 是 a_1 与 a_{2k} 的等比中项, 则 $k=$ ( )

(A) 2 (B) 4 (C) 6 (D) 8

9. 设 a, b, c 均为正数, 且 $2^a=\log_{\frac{1}{2}}a$, $\left(\dfrac{1}{2}\right)^b=\log_{\frac{1}{2}}b$, $\left(\dfrac{1}{2}\right)^c=\log_2 c$. 则 ( )

(A) $a<b<c$ (B) $c<b<a$ (C) $c<a<b$ (D) $b<a<c$

10. 设两个向量 $\boldsymbol{a}=(\lambda+2,\lambda^2-\cos^2\alpha)$ 和 $\boldsymbol{b}=\left(m,\dfrac{m}{2}+\sin\alpha\right)$, 其中 λ, m, α 为实数. 若 $\boldsymbol{a}=2\boldsymbol{b}$, 则 $\dfrac{\lambda}{m}$ 的取值范围是 ( )

(A) $[-6,1]$ (B) $[4,8]$ (C) $(-\infty,1]$ (D) $[-1,6]$

二、填空题

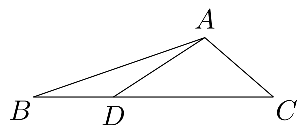
11. 若 $\left(x^2+\dfrac{1}{ax}\right)^6$ 的二项展开式中 x^3 的系数为 $\dfrac{5}{2}$, 则 $a=$______. (用数字作答)

12. 一个长方体的各顶点均在同一球的球面上, 且一个顶点上的三条棱的长分别为 1, 2, 3, 则此球的表面积为______.

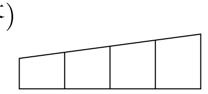
13. 设等差数列 $\{a_n\}$ 的公差 d 是 2, 前 n 项的和为 S_n, 则 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_n^2-n^2}{S_n}=$______.

14. 已知两圆 $x^2+y^2=10$ 和 $(x-1)^2+(y-3)^2=20$ 相交于 A, B 两点, 则直线 AB 的方程是______.

15. 如图, 在 $\triangle ABC$ 中, $\angle BAC=120^\circ$, $AB=2AC=1$, D 是边 BC 上一点, $DC=2BD$, 则 $\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{BC}=$______.



16. 如图, 用 6 种不同的颜色给图中的 4 个格子涂色, 每个格子涂一种颜色. 要求最多使用 3 种颜色且相邻的两个格子颜色不同, 则不同的涂色方法共有______种. (用数字作答)



三、解答题

17. 已知函数 $f(x)=2\cos x(\sin x-\cos x)+1$, $x\in\mathbf{R}$.

(1) 求函数 $f(x)$ 的最小正周期;

(2) 求函数 $f(x)$ 在区间 $\left[\dfrac{\pi}{8},\dfrac{3\pi}{4}\right]$ 上的最小值和最大值.

18. 已知甲盒内有大小相同的 1 个红球和 3 个黑球, 乙盒内有大小相同的 2 个红球和 4 个黑球. 现从甲、乙两个盒内各任取 2 个球.

(1) 求取出的 4 个球均为黑球的概率;

(2) 求取出的 4 个球中恰有 1 个红球的概率;

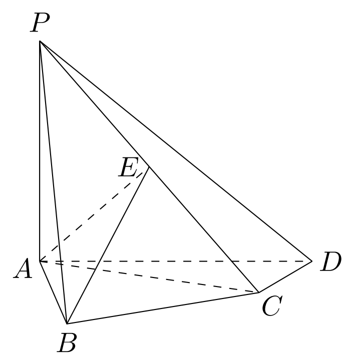
(3) 设 ξ 为取出的 4 个球中红球的个数, 求 ξ 的分布列和数学期望.

19. 如图, 在四棱锥 $P-ABCD$ 中, $PA\perp$ 底面 $ABCD$, $AB\perp AD$, $AC\perp CD$, $\angle ABC=60^\circ$, $PA=AB=BC$, E 是 PC 的中点.

(1) 证明 $CD\perp AE$;

(2) 证明 $PD\perp$ 平面 ABE;

(3) 求二面角 $A-PD-C$ 的大小.



20. 已知函数 $f(x)=\dfrac{2ax-a^2+1}{x^2+1}$ $(x\in\mathbf{R})$, 其中 $a\in\mathbf{R}$.

(1) 当 $a=1$ 时, 求曲线 $y=f(x)$ 在点 $(2,f(2))$ 处的切线方程;

(2) 当 $a\neq 0$ 时, 求函数 $f(x)$ 的单调区间与极值.

21. 在数列 $\{a_n\}$ 中, $a_1=2$, $a_{n+1}=\lambda a_n+\lambda^{n+1}+(2-\lambda)2^n$ $(n\in\mathbf{N}^*)$, 其中 $\lambda>0$.

(1) 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式;

(2) 求数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和 S_n;

(3) 证明存在 $k\in\mathbf{N}^*$, 使得 $\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\leqslant\dfrac{a_{k+1}}{a_k}$ 对任意 $n\in\mathbf{N}^*$ 均成立.

22. 设椭圆 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ $(a>b>0)$ 的左、右焦点分别为 F_1, F_2, A 是椭圆上的一点, $AF_2\perp F_1F_2$, 原点 O 到直线 AF_1 的距离为 $\dfrac{1}{3}|OF_1|$.

(1) 证明 $a=\sqrt{2}b$;

(2) 设 Q_1, Q_2 为椭圆上的两个动点, $OQ_1\perp OQ_2$, 过原点 O 作直线 Q_1Q_2 的垂线 OD, 垂足为 D, 求点 D 的轨迹方程.