2007 普通高等学校招生考试 (安徽卷理)

一、选择题

1. 下列函数中, 反函数是其自身的函数为 ( )

(A) $f(x)=x^2,\ x\in[0,+\infty)$　(B) $f(x)=x^3,\ x\in(-\infty,+\infty)$

(C) $f(x)=\mathrm{e}^x,\ x\in(-\infty,+\infty)$　(D) $f(x)=\dfrac{1}{x},\ x\in(0,+\infty)$

2. 设 l, m, n 均为直线, 其中 m, n 在平面 α 内, “$l\perp\alpha$”是“$l\perp m$ 且 $l\perp n$”的 ( )

(A) 充分不必要条件　(B) 必要不充分条件

(C) 充分必要条件　(D) 既不充分也不必要条件

3. 若对任意 $x\in\mathbf{R}$, 不等式 $|x|\geqslant ax$ 恒成立, 则实数 a 的取值范围是 ( )

(A) $a<-1$　(B) $|a|\leqslant 1$　(C) $|a|<1$　(D) $a\geqslant 1$

4. 若 a 为实数, $\dfrac{2+a\mathrm{i}}{1+\sqrt{2}\mathrm{i}}=-\sqrt{2}\mathrm{i}$, 则 a 等于 ( )

(A) $\sqrt{2}$　(B) $-\sqrt{2}$　(C) $2\sqrt{2}$　(D) $-2\sqrt{2}$

5. 若 $A=\{x\in\mathbf{Z}\mid 2\leqslant 2^{2-x}<8\}$, $B=\{x\in\mathbf{R}\mid |\log_2 x|>1\}$, 则 $A\cap(\complement_{\mathbf{R}}B)$ 的元素个数为 ( )

(A) 0　(B) 1　(C) 2　(D) 3

6. 函数 $f(x)=3\sin\left(2x-\dfrac{\pi}{3}\right)$ 的图象为 C,

① 图象 C 关于直线 $x=\dfrac{11}{12}\pi$ 对称;

② 函数 $f(x)$ 在区间 $\left(-\dfrac{\pi}{12},\dfrac{5\pi}{12}\right)$ 内是增函数;

③ 由 $y=3\sin 2x$ 的图象向右平移 $\dfrac{\pi}{3}$ 个单位长度可以得到图象 C.

以上三个论断中, 正确论断的个数是 ( )

(A) 0　(B) 1　(C) 2　(D) 3

7. 如果点 P 在平面区域 $\begin{cases}2x-y+2\geqslant 0,\\ x-2y+1\leqslant 0,\\ x+y-2\leqslant 0\end{cases}$ 上, 点 Q 在曲线 $x^2+(y+2)^2=1$ 上, 那么 $|PQ|$ 的最小值为 ( )

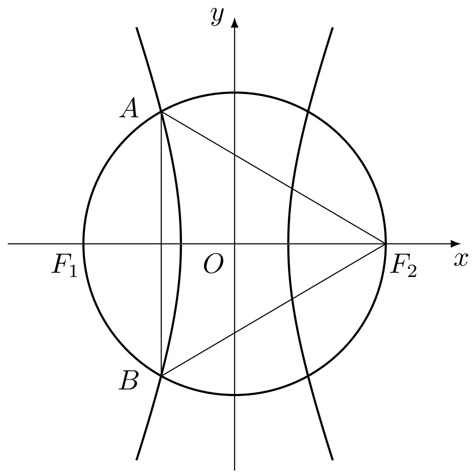
(A) $\sqrt{5}-1$　(B) $\dfrac{4}{\sqrt{5}}-1$　(C) $2\sqrt{2}-1$　(D) $\sqrt{2}-1$

8. 半径为 1 的球面上的四点 A, B, C, D 是正四面体的顶点, 则 A 与 B 两点间的球面距离为 ( )

(A) $\arccos\left(-\dfrac{\sqrt{3}}{3}\right)$　(B) $\arccos\left(-\dfrac{\sqrt{6}}{3}\right)$

(C) $\arccos\left(-\dfrac{1}{3}\right)$　(D) $\arccos\left(-\dfrac{1}{4}\right)$

9. 如图, F_1 和 F_2 分别是双曲线 $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{r^2}{b^2}=1\ (a>0,\ b>0)$ 的两个焦点, A 和 B 是以 O 为圆心, 以 $|OF_1|$ 为半径的圆与该双曲线左支的两个交点, 且 $\triangle F_2AB$ 是等边三角形, 则双曲线的离心率为 ( )



(A) $\sqrt{3}$　(B) $\sqrt{5}$　(C) $\dfrac{\sqrt{5}}{2}$　(D) $1+\sqrt{3}$

10. 以 $\Phi(x)$ 表示标准正态总体在区间 $(-\infty,x)$ 内取值的概率, 若随机变量 ξ 服从正态分布 $N(\mu,\sigma^2)$, 则概率 $P(|\xi-\mu|<\sigma)$ 等于 ( )

(A) $\Phi(\mu+\sigma)-\Phi(\mu-\sigma)$　(B) $\Phi(1)-\Phi(-1)$

(C) $\Phi\left(\dfrac{1-\mu}{\sigma}\right)$　(D) $2\Phi(\mu+\sigma)$

11. 定义在 $\mathbf{R}$ 上的函数 $f(x)$ 既是奇函数, 又是周期函数, T 是它的一个正周期. 若将方程 $f(x)=0$ 在闭区间 $[-T,T]$ 上的根的个数记为 n, 则 n 可能为 ( )

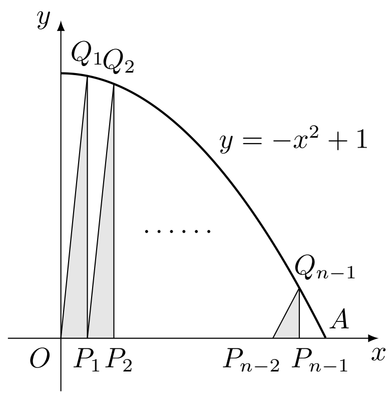
(A) 0　(B) 1　(C) 3　(D) 5

二、填空题

12. 若 $\left(2x^3+\dfrac{1}{\sqrt{x}}\right)^n$ 的展开式中含有常数项, 则最小的正整数 n 等于______.

13. 在四面体 $O-ABC$ 中, $\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{a}$, $\overrightarrow{OB}=\boldsymbol{b}$, $\overrightarrow{OC}=\boldsymbol{c}$, D 为 BC 的中点, E 为 AD 的中点, 则 $\overrightarrow{OE}=$______. (用 $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ 表示)

14. 如图, 抛物线 $y=-x^2+1$ 与 x 轴的正半轴交于点 A, 将线段 OA 的 n 等分点从左至右依次记为 $P_1, P_2, \cdots, P_{n-1}$, 过这些分点分别作 x 轴的垂线, 与抛物线的交点依次为 $Q_1, Q_2, \cdots, Q_{n-1}$, 从而得到 $n-1$ 个直角三角形 $\triangle Q_1OP_1$, $\triangle Q_2P_1P_2$, $\cdots$, $\triangle Q_{n-1}P_{n-2}P_{n-1}$. 当 $n\to\infty$ 时, 这些三角形的面积之和的极限为______.



15. 在正方体上任意选择 4 个顶点, 它们可能是如下各种几何形体的 4 个顶点, 这些几何形体是______. (写出所有正确结论的编号)

① 矩形;

② 不是矩形的平行四边形;

③ 有三个面为等腰直角三角形, 有一个面为等边三角形的四面体;

④ 每个面都是等边三角形的四面体;

⑤ 每个面都是直角三角形的四面体.

三、解答题

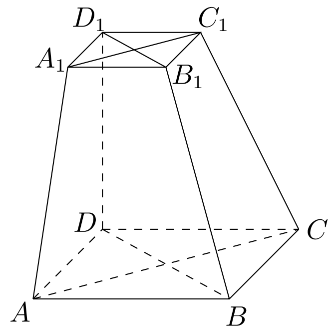
16. 已知 $0<\alpha<\dfrac{\pi}{4}$, β 为 $f(x)=\cos\left(2x+\dfrac{\pi}{8}\right)$ 的最小正周期, $\boldsymbol{a}=\left(\tan\left(\alpha+\dfrac{1}{4}\beta\right),-1\right)$, $\boldsymbol{b}=(\cos\alpha,2)$, 且 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=m$. 求 $\dfrac{2\cos^2\alpha+\sin 2(\alpha+\beta)}{\cos\alpha-\sin\alpha}$ 的值.

17. 如图, 在六面体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中, 四边形 $ABCD$ 是边长为 2 的正方形, 四边形 $A_1B_1C_1D_1$ 是边长为 1 的正方形, $DD_1\perp$ 平面 $A_1B_1C_1D_1$, $DD_1\perp$ 平面 $ABCD$, $DD_1=2$.

(1) 求证: A_1C_1 与 AC 共面, B_1D_1 与 BD 共面;

(2) 求证: 平面 $A_1ACC_1\perp$ 平面 B_1BDD_1;

(3) 求二面角 $A-BB_1-C$ 的大小. (用反三角函数值表示)



18. 设 $a \geqslant 0$, $f(x)=x-1-\ln^2 x+2a\ln x\ (x>0)$.

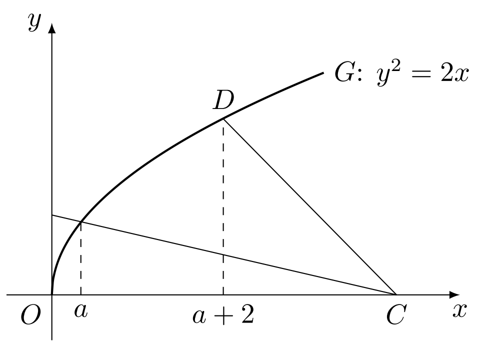
(1) 令 $F(x)=xf'(x)$, 讨论 $F(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 内的单调性并求极值;

(2) 求证: 当 $x>1$ 时, 恒有 $x>\ln^2 x-2a\ln x+1$.

19. 如图, 曲线 G 的方程为 $y^2=2x\ (y\geqslant 0)$. 以原点为圆心, 以 $t\ (t>0)$ 为半径的圆分别与曲线 G 和 y 轴的正半轴相交于点 A 与点 B. 直线 AB 与 x 轴相交于点 C.

(1) 求点 A 的横坐标 a 与点 C 的横坐标 c 的关系式;

(2) 设曲线 G 上点 D 的横坐标为 $a+2$, 求证: 直线 CD 的斜率为定值.



20. 在医学生物学试验中, 经常以果蝇作为试验对象, 一个关有 6 只果蝇的笼子里, 不慎混入了两只苍蝇 (此时笼内共有 8 只蝇子: 6 只果蝇和 2 只苍蝇), 只好把笼子打开一个小孔, 让蝇子一只一只地往外飞, 直到两只苍蝇都飞出, 再关闭小孔. 以 ξ 表示笼内还剩下的果蝇的只数.

(1) 写出 ξ 的分布列 (不要求写出计算过程);

(2) 求数学期望 $E\xi$;

(3) 求概率 $P(\xi\geqslant E\xi)$.

21. 某国采用养老储备金制度. 公民在就业的第一年就交纳养老储备金, 数目为 a_1, 以后每年交纳的数目均比上一年增加 $d\ (d>0)$, 因此, 历年所交纳的储务金数目 a_1, a_2, $\cdots$ 是一个公差为 d 的等差数列, 与此同时, 国家给予优惠的计息政策, 不仅采用固定利率, 而且计算复利. 这就是说, 如果固定年利率为 $r\ (r>0)$, 那么, 在第 n 年末, 第一年所交纳的储备金就变为 $a_1(1+r)^{n-1}$, 第二年所交纳的储备金就变为 $a_2(1+r)^{n-2}$, $\cdots$. 以 T_n 表示到第 n 年末所累计的储备金总额.

(1) 写出 T_n 与 $T_{n-1}\ (n\geqslant 2)$ 的递推关系式;

(2) 求证: $T_n=A_n+B_n$, 其中 $\{A_n\}$ 是一个等比数列, $\{B_n\}$ 是一个等差数列.