

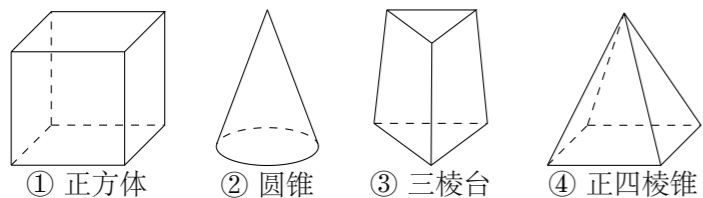
2007 普通高等学校招生考试 (山东卷理)

一、选择题

1. 若 $z = \cos \theta + i \sin \theta$ (i 为虚数单位), 则 $z^2 = -1$ 的 θ 值可能是 ()
 (A) $\frac{\pi}{6}$ (B) $\frac{\pi}{4}$ (C) $\frac{\pi}{3}$ (D) $\frac{\pi}{2}$

2. 已知集合 $M = \{-1, 1\}$, $N = \left\{x \mid \frac{1}{2} < 2^{x+1} < 4, x \in \mathbf{Z}\right\}$, 则 $M \cap N =$ ()
 (A) $\{-1, 1\}$ (B) $\{-1\}$ (C) $\{0\}$ (D) $\{-1, 0\}$

3. 下列几何体各自的三视图中, 有且仅有两个视图相同的是 ()



(A) ①② (B) ①③ (C) ①④ (D) ②④

4. 设 $a \in \left\{-1, 1, \frac{1}{2}, 3\right\}$, 则使函数 $y = x^a$ 的定义域为 \mathbf{R} 且为奇函数的所有 a 值为 ()

(A) 1, 3 (B) -1, 1 (C) -1, 3 (D) -1, 1, 3

5. 函数 $y = \sin\left(2x + \frac{\pi}{6}\right) + \cos\left(2x + \frac{\pi}{3}\right)$ 的最小正周期和最大值分别为 ()

(A) $\pi, 1$ (B) $\pi, \sqrt{2}$ (C) $2\pi, 1$ (D) $2\pi, \sqrt{2}$

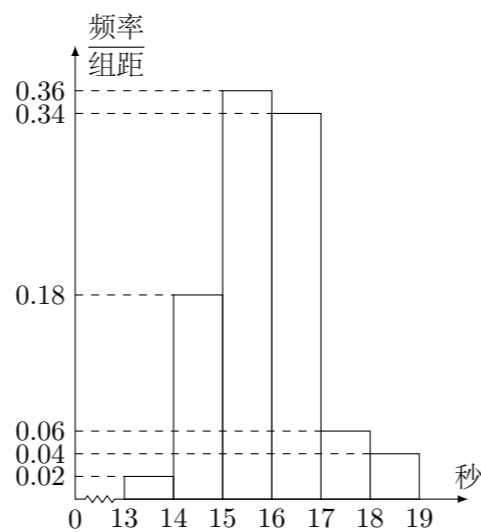
6. 给出下列三个等式: $f(xy) = f(x) + f(y)$, $f(x+y) = f(x)f(y)$, $f(x+y) = \frac{f(x) + f(y)}{1 - f(x)f(y)}$. 下列函数中不满足其中任何一个等式的是 ()

(A) $f(x) = 3^x$ (B) $f(x) = \sin x$ (C) $f(x) = \log_2 x$ (D) $f(x) = \tan x$

7. 命题“对任意的 $x \in \mathbf{R}$, $x^3 - x^2 + 1 \leq 0$ ”的否定是 ()

(A) 不存在 $x \in \mathbf{R}$, $x^3 - x^2 + 1 \leq 0$
 (B) 存在 $x \in \mathbf{R}$, $x^3 - x^2 + 1 \leq 0$
 (C) 存在 $x \in \mathbf{R}$, $x^3 - x^2 + 1 > 0$
 (D) 对任意的 $x \in \mathbf{R}$, $x^3 - x^2 + 1 > 0$

8. 某班 50 名学生在一次百米测试中, 成绩全部介于 13 秒与 19 秒之间, 将测试结果按如下方式分成六组: 第一组, 成绩大于等于 13 秒且小于 14 秒; 第二组, 成绩大于等于 14 秒且小于 15 秒; \dots ; 第六组, 成绩大于等于 18 秒且小于 19 秒. 如图是按上述分组方法得到的频率分布直方图. 设成绩小于 17 秒的学生人数占全班总人数的百分比为 x , 成绩大于等于 15 秒且小于 17 秒的学生人数为 y , 则从频率分布直方图中可分析出 x 和 y 分别为 ()

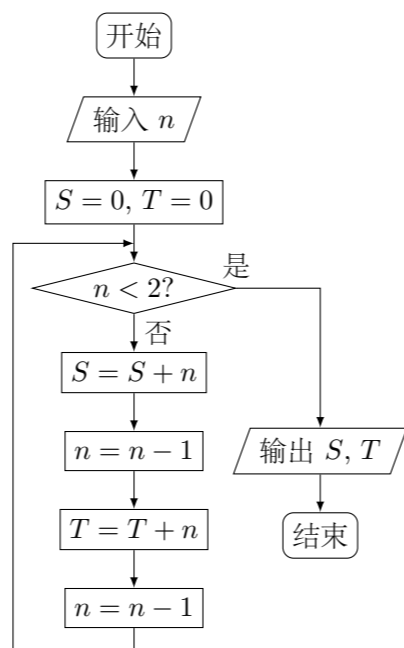


(A) 0.9, 35 (B) 0.9, 45 (C) 0.1, 35 (D) 0.1, 45

9. 下列各小题中, p 是 q 的充要条件的是 ()

- ① $p: m < 2$ 或 $m > 6$; $q: y = x^2 + mx + m + 3$ 有两个不同的零点.
 - ② $p: \frac{f(-x)}{f(x)} = 1$; $q: y = f(x)$ 是偶函数.
 - ③ $p: \cos \alpha = \cos \beta$; $q: \tan \alpha = \tan \beta$.
 - ④ $p: A \cap B = A$; $q: \complement_U B \subseteq \complement_U A$.
- (A) ①② (B) ②③ (C) ③④ (D) ①④

10. 阅读如图的程序框图, 若输入的 n 是 100, 则输出的变量 S 和 T 的值依次是 ()



(A) 2500, 2500 (B) 2550, 2550 (C) 2500, 2550 (D) 2550, 2500

11. 在直角 $\triangle ABC$ 中, CD 是斜边 AB 上的高, 则下列等式不成立的是 ()

- (A) $|\overrightarrow{AC}|^2 = \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AB}$
- (B) $|\overrightarrow{BC}|^2 = \overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC}$
- (C) $|\overrightarrow{AB}|^2 = \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{CD}$

(D) $|\overrightarrow{CD}|^2 = \frac{(\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AB}) \times (\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC})}{|\overrightarrow{AB}|^2}$

12. 位于坐标原点的一个质点 P 按下述规则移动: 质点每次移动一个单位; 移动的方向为向上或向右, 并且向上、向右移动的概率都是 $\frac{1}{2}$. 质点 P 移动 5 次后位于点 $(2, 3)$ 的概率为 ()

(A) $\left(\frac{1}{2}\right)^5$ (B) $C_5^2 \left(\frac{1}{2}\right)^5$ (C) $C_5^3 \left(\frac{1}{2}\right)^3$ (D) $C_5^2 C_5^3 \left(\frac{1}{2}\right)^5$

二、填空题

13. 设 O 是坐标原点, F 是抛物线 $y^2 = 2px$ ($p > 0$) 的焦点, A 是抛物线上的一点, \overrightarrow{FA} 与 x 轴正向的夹角为 60° , 则 $|\overrightarrow{OA}|$ 为_____.

14. 设 D 是不等式组 $\begin{cases} x + 2y \leq 10, \\ 2x + y \geq 3, \\ 0 \leq x \leq 4, \\ y \geq 1 \end{cases}$ 表示的平面区域, 则 D 中的点 $P(x, y)$ 到直线 $x + y = 10$ 距离的最大值是_____.

15. 与直线 $x + y - 2 = 0$ 和曲线 $x^2 + y^2 - 12x - 12y + 54 = 0$ 都相切的半径最小的圆的标准方程是_____.

16. 函数 $y = \log_a(x + 3) - 1$ ($a > 0, a \neq 1$) 的图象恒过定点 A , 若点 A 在直线 $mx + ny + 1 = 0$ 上, 其中 $mn > 0$, 则 $\frac{1}{m} + \frac{2}{n}$ 的最小值为_____.

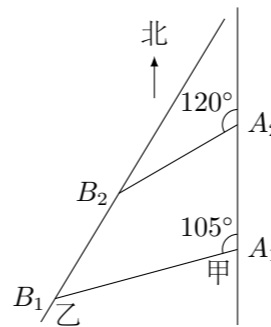
三、解答题

17. 设数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1 + 3a_2 + 3^2a_3 + \dots + 3^{n-1}a_n = \frac{n}{3}, n \in \mathbf{N}^*$.

- (1) 求数列 $\{a_n\}$ 的通项;
- (2) 设 $b_n = \frac{n}{a_n}$, 求数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和 S_n .

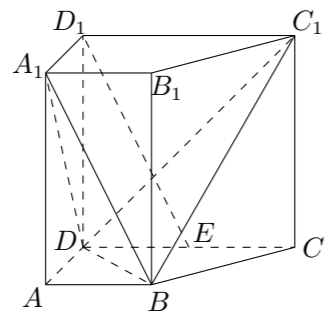
18. 设 b 和 c 分别是先后抛掷一枚骰子得到的点数, 用随机变量 ξ 表示方程 $x^2 + bx + c = 0$ 实根的个数 (重根按一个计).
- (1) 求方程 $x^2 + bx + c = 0$ 有实根的概率;
 - (2) 求 ξ 的分布列和数学期望;
 - (3) 求在先后两次出现的点数中有 5 的条件下, 方程 $x^2 + bx + c = 0$ 有实根的概率.

20. 如图, 甲船以每小时 $30\sqrt{2}$ 海里的速度向正北方向航行, 乙船按固定方向匀速直线航行. 当甲船位于 A_1 处时, 乙船位于甲船的北偏西 105° 方向的 B_1 处, 此时两船相距 20 海里. 当甲船航行 20 分钟到达 A_2 处时, 乙船航行到甲船的北偏西 120° 方向的 B_2 处, 此时两船相距 $10\sqrt{2}$ 海里. 问乙船每小时航行多少海里?



22. 设函数 $f(x) = x^2 + b \ln(x+1)$, 其中 $b \neq 0$.
- (1) 当 $b > \frac{1}{2}$ 时, 判断函数 $f(x)$ 在定义域上的单调性;
 - (2) 求函数 $f(x)$ 的极值点;
 - (3) 证明对任意的正整数 n , 不等式 $\ln\left(\frac{1}{n} + 1\right) > \frac{1}{n^2} - \frac{1}{n^3}$ 都成立.

19. 如图, 在直四棱柱 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 中, 已知 $DC = DD_1 = 2AD = 2AB$, $AD \perp DC$, $AB \parallel DC$.
- (1) 设 E 是 DC 的中点, 求证: $D_1E \parallel$ 平面 A_1BD ;
 - (2) 求二面角 $A_1 - BD - C_1$ 的余弦值.



21. 已知椭圆 C 的中心在坐标原点, 焦点在 x 轴上, 椭圆 C 上的点到焦点距离的最大值为 3, 最小值为 1.
- (1) 求椭圆 C 的标准方程;
 - (2) 若直线 $l: y = kx + m$ 与椭圆 C 相交于 A, B 两点 (A, B 不是左右顶点), 且以 AB 为直径的圆过椭圆 C 的右顶点. 求证: 直线 l 过定点, 并求出该定点的坐标.