2007 普通高等学校招生考试 (江西卷理)

一、选择题

1. 化简 $\dfrac{2+4\mathrm{i}}{(1+\mathrm{i})^2}$ 的结果是 ( )

(A) $2+\mathrm{i}$　(B) $-2+\mathrm{i}$　(C) $2-\mathrm{i}$　(D) $-2-\mathrm{i}$

2. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^3-x^2}{x-1}$ ( )

(A) 等于 0　(B) 等于 1　(C) 等于 3　(D) 不存在

3. 若 $\tan\left(\dfrac{\pi}{4}-\alpha\right)=3$, 则 $\cot\alpha$ 等于 ( )

(A) -2　(B) $-\dfrac{1}{2}$　(C) $\dfrac{1}{2}$　(D) 2

4. 已知 $\left(\sqrt{x}+\dfrac{3}{\sqrt[3]{x}}\right)^n$ 展开式中, 各项系数的和与其各项二项式系数的和之比为 64, 则 n 等于 ( )

(A) 4　(B) 5　(C) 6　(D) 7

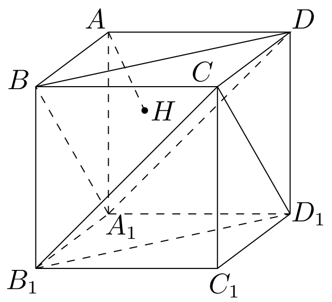
5. 若 $0<x<\dfrac{\pi}{2}$, 则下列命题中正确的是 ( )

(A) $\sin x<\dfrac{3}{\pi}x$　(B) $\sin x>\dfrac{3}{\pi}x$　(C) $\sin x<\dfrac{4}{\pi^2}x^2$　(D) $\sin x>\dfrac{4}{\pi^2}x^2$

6. 若集合 $M=\{0,\ 1,\ 2\}$, $N=\{(x,y)|x-2y+1\geqslant 0$ 且 $x-2y-1\leqslant 0,\ x,\ y\in M\}$, 则 N 中元素的个数为 ( )

(A) 9　(B) 6　(C) 4　(D) 2

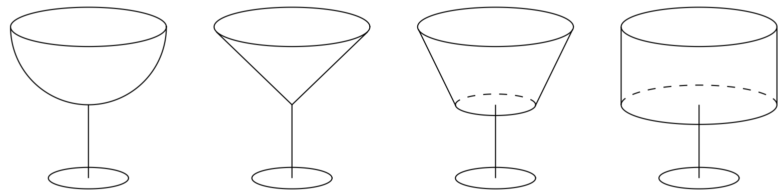
7. 如图, 正方体 AC_1 的棱长为 1, 过点 A 作平面 A_1BD 的垂线, 垂足为点 H. 则以下命题中, 错误的是 ( )



(A) 点 H 是 $\triangle A_1BD$ 的垂心　(B) AH 垂直平面 CB_1D_1

(C) AH 的延长线经过点 C_1　(D) 直线 AH 和 BB_1 所成的角为 45°

8. 四位好朋友在一次聚会上, 他们按照各自的爱好选择了形状不同、内空高度相等、杯口半径相等的圆口酒杯, 如图所示, 盛满酒后他们约定: 先各自饮杯中酒的一半. 设剩余酒的高度从左到右依次为 h_1, h_2, h_3, h_4, 则它们的大小关系正确的是 ( )



(A) $h_2>h_1>h_4$　(B) $h_1>h_2>h_3$　(C) $h_3>h_2>h_4$　(D) $h_2>h_4>h_1$

9. 设椭圆 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1\ (a>b>0)$ 的离心率为 $e=\dfrac{1}{2}$, 右焦点为 $F(c,0)$, 方程 $ax^2+bx-c=0$ 的两个实根分别为 x_1 和 x_2, 则点 $P(x_1,x_2)$ ( )

(A) 必在圆 $x^2+y^2=2$ 内　(B) 必在圆 $x^2+y^2=2$ 上

(C) 必在圆 $x^2+y^2=2$ 外　(D) 以上三种情形都有可能

10. 将一个骰子连续抛掷三次, 它落地时向上的点数依次成等差数列的概率为 ( )

(A) $\dfrac{1}{9}$　(B) $\dfrac{1}{12}$　(C) $\dfrac{1}{15}$　(D) $\dfrac{1}{18}$

11. 设函数 $f(x)$ 是 $\mathbf{R}$ 上以 5 为周期的可导偶函数, 则曲线 $y=f(x)$ 在 $x=5$ 处的切线的斜率为 ( )

(A) $-\dfrac{1}{5}$　(B) 0　(C) $\dfrac{1}{5}$　(D) 5

12. 设 p: $f(x)=\mathrm{e}^x+\ln x+2x^2+mx+1$ 在 $(0,+\infty)$ 内单调递增, q: $m\geqslant -5$, 则 p 是 q 的 ( )

(A) 充分不必要条件　(B) 必要不充分条件

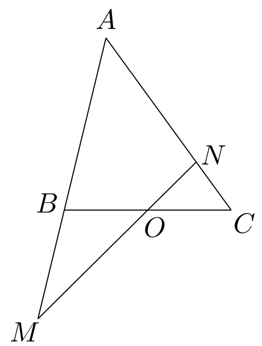
(C) 充分必要条件　(D) 既不充分也不必要条件

二、填空题

13. 设函数 $y=4+\log_2(x-1)\ (x\geqslant 3)$, 则其反函数的定义域为______.

14. 已知数列 $\{a_n\}$ 对于任意 p, $q\in\mathbf{N}^*$, 有 $a_p+a_q=a_{p+q}$, 若 $a_1=\dfrac{1}{9}$, 则 $a_{36}=$______.

15. 如图, 在 $\triangle ABC$ 中, 点 O 是 BC 的中点, 过点 O 的直线分别交直线 AB、AC 于不同的两点 M、N, 若 $\overrightarrow{AB}=m\overrightarrow{AM}$, $\overrightarrow{AC}=n\overrightarrow{AN}$, 则 $m+n$ 的值为______.



16. 设有一组圆 C_1: $(x-k+1)^2+(y-3k)^2=2k^4\ (k\in\mathbf{N}^*)$. 下面四个命题:

A. 存在一条定直线与所有的圆均相切;

B. 存在一条定直线与所有的圆均相交;

C. 存在一条定直线与所有的圆均不相交;

D. 所有的圆均不经过原点.

其中真命题的代号是______. (写出所有真命题的代号)

三、解答题

17. 已知函数 $f(x)=\begin{cases}cx+1, & 0<x<c,\\ 2^{-\frac{x}{c^2}}+k, & c\leqslant x<1,\end{cases}$ 在区间 $(0,1)$ 内连续, 且 $f(c^2)=\dfrac{9}{8}$.

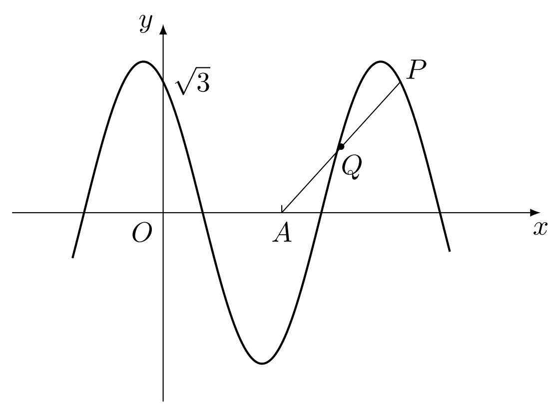
(1) 求实数 k 和 c 的值;

(2) 解不等式 $f(x)>\dfrac{\sqrt{2}}{8}+1$.

18. 如图, 函数 $y=2\cos(\omega x+\theta)$ $\left(x\in\mathbf{R},\ 0\leqslant\theta\leqslant\dfrac{\pi}{2}\right)$ 的图象与 y 轴交于点 $(0,\sqrt{3})$, 且在该点处切线的斜率为 -2.

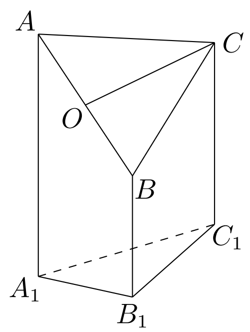
(1) 求 θ 和 ω 的值;

(2) 已知点 $A\left(\dfrac{\pi}{2},0\right)$, 点 P 是该函数图象上的一点, 点 $Q(x_0,y_0)$ 是 PA 的中点, 当 $y_0=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$, $x_0\in\left[\dfrac{\pi}{2},\pi\right]$ 时, 求 x_0 的值.

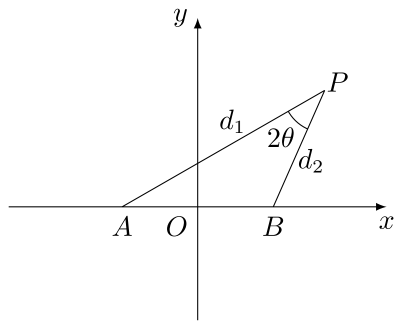


19. 某陶瓷厂准备烧制甲、乙、丙三件不同的工艺品, 制作过程中必须先后经过两次烧制, 当第一次烧制合格后可进入第二次烧制, 两次烧制过程相互独立. 根据该厂现有的技术水平, 经过第一次烧制后, 甲、乙、丙三件产品合格的概率依次为 0.5, 0.6, 0.4. 经过第二次烧制后, 甲、乙、丙三件产品合格的概率依次为 0.6, 0.5, 0.75.
(1) 求第一次烧制后恰有一件产品合格的概率;
(2) 经过前后两次烧制后, 合格工艺品的个数为 ξ, 求随机变量 ξ 的期望.

20. 如图是一个直三棱柱 (以 $A_1B_1C_1$ 为底面) 被一平面所截得到的几何体, 截面为 ABC. 已知 $A_1B_1 = B_1C_1 = 1$, $\angle A_1B_1C_1 = 90^\circ$, $AA_1 = 4$, $BB_1 = 2$, $CC_1 = 3$.
(1) 设点 O 是 AB 的中点, 证明: $OC \parallel$ 平面 $A_1B_1C_1$;
(2) 求二面角 $B - AC - A_1$ 的大小;
(3) 求此几何体的体积.



21. 设动点 P 到点 $A(-1,0)$ 和 $B(1,0)$ 的距离分别为 d_1 和 d_2, $\angle APB = 2\theta$. 且存在常数 λ $(0 < \lambda < 1)$, 使得 $d_1d_2\sin^2\theta = \lambda$.
(1) 证明: 动点 P 的轨迹 C 为双曲线, 并求出 C 的方程;
(2) 过点 B 作直线交双曲线 C 的右支于 M、N 两点, 试确定 λ 的范围, 使 $\overrightarrow{OM} \cdot \overrightarrow{ON} = 0$, 其中点 O 为坐标原点.



22. 设正整数数列 $\{a_n\}$ 满足: $a_2 = 4$, 且对于任何 $n \in \mathbf{N}^*$, 有 $2 + \dfrac{1}{a_{n+1}} < \dfrac{\dfrac{1}{a_n} + \dfrac{1}{a_{n+1}}}{\dfrac{1}{n} - \dfrac{1}{n+1}} < 2 + \dfrac{1}{a_n}$.
(1) 求 a_1, a_3;
(2) 求数列 $\{a_n\}$ 的通项 a_n.