2007 普通高等学校招生考试 (湖北卷文)

一、选择题

1. $\tan 690^\circ$ 的值为 ( )

(A) $-\dfrac{\sqrt{3}}{3}$ (B) $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$ (C) $\sqrt{3}$ (D) $-\sqrt{3}$

2. 如果 $U=\{x \mid x$ 是小于 9 的正整数$\}$, $A=\{1,\ 2,\ 3,\ 4\}$, $B=\{3,\ 4,\ 5,\ 6\}$, 那么 $\complement_U A \cap \complement_U B=$ ( )

(A) $\{1,\ 2\}$ (B) $\{3,\ 4\}$ (C) $\{5,\ 6\}$ (D) $\{7,\ 8\}$

3. 如果 $\left(3x^2-\dfrac{2}{x^3}\right)^n$ 的展开式中含有非零常数项, 则正整数 n 的最小值为 ( )

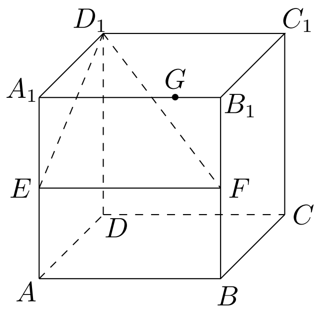
(A) 10 (B) 6 (C) 5 (D) 3

4. 函数 $y=\dfrac{2^x+1}{2^x-1}$ $(x<0)$ 的反函数是 ( )

(A) $y=\log_2\dfrac{x+1}{x-1}$ $(x<-1)$ (B) $y=\log_2\dfrac{x+1}{x-1}$ $(x>1)$

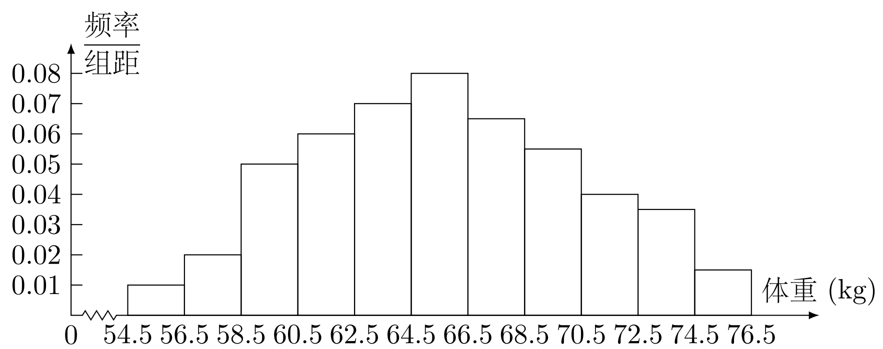
(C) $y=\log_2\dfrac{x-1}{x+1}$ $(x<-1)$ (D) $y=\log_2\dfrac{x-1}{x+1}$ $(x>1)$

5. 在棱长为 1 的正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中, E、F 分别为棱 AA_1、BB_1 的中点, G 为棱 A_1B_1 上的一点, 且 $A_1G=\lambda$ $(0\leqslant\lambda\leqslant 1)$, 则点 G 到平面 D_1EF 的距离为 ( )



(A) $\sqrt{3}$ (B) $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ (C) $\dfrac{\sqrt{2}\lambda}{3}$ (D) $\dfrac{\sqrt{5}}{5}$

6. 为了了解某学校学生的身体发育情况, 抽查了该校 100 名高中男生的体重情况, 根据所得数据画出样本的频率分布直方图如图所示. 根据此图, 估计该校 2000 名高中男生中体重大于 70.5 公斤的人数为 ( )



(A) 300 (B) 360 (C) 420 (D) 450

7. 将 5 本不同的书全发给 4 名同学, 每名同学至少有一本书的概率是 ( )

(A) $\dfrac{15}{64}$ (B) $\dfrac{15}{128}$ (C) $\dfrac{24}{125}$ (D) $\dfrac{48}{125}$

8. 由直线 $y=x+1$ 上的一点向圆 $(x-3)^2+y^2=1$ 引切线, 则切线长的最小值为 ( )

(A) 1 (B) $2\sqrt{2}$ (C) $\sqrt{7}$ (D) 3

9. 设 $\boldsymbol{a}=(4,3)$, $\boldsymbol{a}$ 在 $\boldsymbol{b}$ 上的投影为 $\dfrac{5\sqrt{2}}{2}$, $\boldsymbol{b}$ 在 x 轴上的投影为 2, 且 $|\boldsymbol{b}|\leqslant 14$, 则 $\boldsymbol{b}$ 为 ( )

(A) $(2,14)$ (B) $\left(2,-\dfrac{2}{7}\right)$ (C) $\left(-2,\dfrac{2}{7}\right)$ (D) $(2,8)$

10. 已知 p 是 r 的充分条件而不是必要条件, q 是 r 的充分条件, s 是 r 的必要条件, q 是 s 的必要条件, 现有下列命题:

① s 是 q 的充要条件;
② p 是 q 的充分条件而不是必要条件;
③ r 是 q 的必要条件而不是充分条件;
④ $\neg p$ 是 $\neg s$ 的必要条件而不是充分条件;
⑤ r 是 s 的充分条件而不是必要条件.
则正确命题的序号是 ( )

(A) ①④⑤ (B) ①②④ (C) ②③⑤ (D) ②④⑤

二、填空题

11. 设变量 x, y 满足约束条件 $\begin{cases} x-y+3\geqslant 0, \\ x+y\geqslant 0, \\ -2\leqslant x\leqslant 3, \end{cases}$ 则目标函数 $2x+y$ 的最小值为______.

12. 过双曲线 $\dfrac{x^2}{4}-\dfrac{y^2}{3}=1$ 左焦点 F_1 的直线交双曲线的左支于 M、N 两点, F_2 为其右焦点, 则 $|MF_2|+|NF_2|-|MN|$ 的值为______.

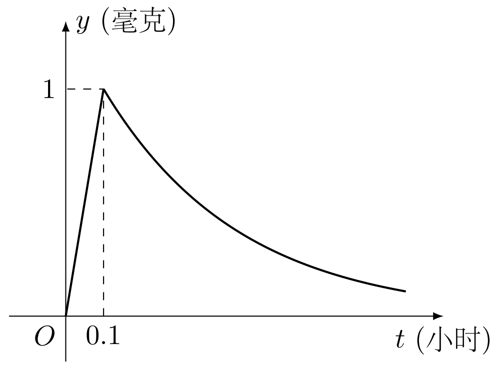
13. 已知函数 $y=f(x)$ 的图象在点 $M(1,f(1))$ 处的切线方程是 $y=\dfrac{1}{2}x+2$, 则 $f(1)+f'(1)=$______.

14. 某男运动员在三分线投球的命中率是 $\dfrac{1}{2}$, 他投球 10 次, 恰好投进 3 个球的概率______. (用数值作答)

15. 为了预防流感, 某学校对教室用药薰消毒法进行消毒. 已知药物释放过程中, 室内每立方米空气中的含药量 y (毫克) 与时间 t (小时) 成正比; 药物释放完毕后, y 与 t 的函数关系式为 $y=\left(\dfrac{1}{16}\right)^{t-a}$ (a 为常数), 如图所示. 据图中提供的信息, 回答下列问题:

(1) 从药物释放开始, 每立方米空气中的含药量 y (毫克) 与时间 t (小时) 之间的函数关系式为______;

(2) 据测定, 当空气中每立方米的含药量降低到 0.25 毫克以下时, 学生方可进教室, 那么药物释放开始, 至少需要经过______小时后, 学生才能回到教室.



三、解答题

16. 已知函数 $f(x)=2\sin^2\left(\dfrac{\pi}{4}+x\right)-\sqrt{3}\cos 2x$, $x\in\left[\dfrac{\pi}{4},\dfrac{\pi}{2}\right]$.

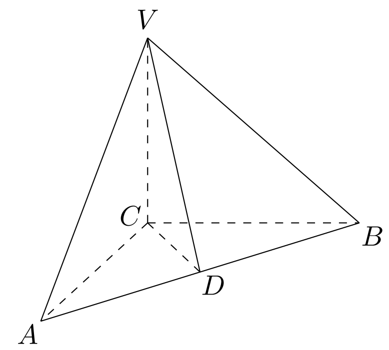
(1) 求 $f(x)$ 的最大值和最小值;

(2) 若不等式 $|f(x)-m|<2$ 在 $x\in\left[\dfrac{\pi}{4},\dfrac{\pi}{2}\right]$ 上恒成立, 求实数 m 的取值范围.

17. 如图, 在三棱锥 $V-ABC$ 中, $VC\perp$ 底面 ABC, $AC\perp BC$, D 是 AB 的中点, 且 $AC=BC=a$, $\angle VDC=\theta$ $\left(0<\theta<\dfrac{\pi}{2}\right)$.

(1) 求证: 平面 $VAB\perp$ 平面 VCD;

(2) 试确定角 θ 的值, 使得直线 BC 与平面 VAB 所成的角为 $\dfrac{\pi}{6}$.



18. 某商品每件成本 9 元, 售价 30 元, 每星期卖出 432 件. 如果降低价格, 销售量可以增加, 且每星期多卖出的商品件数与商品单价的降低值 x (单位: 元, $0 \leqslant x \leqslant 30$) 的平方成正比. 已知商品单价降低 2 元时, 一星期多卖出 24 件.

(1) 将一个星期的商品销售利润表示成 x 的函数;

(2) 如何定价才能使一个星期的商品销售利润最大?

19. 设二次函数 $f(x)=x^2+ax+a$, 方程 $f(x)-x=0$ 的两根 x_1 和 x_2 满足 $0<x_1<x_2<1$.

(1) 求实数 a 的取值范围;

(2) 试比较 $f(0)f(1)-f(0)$ 与 $\dfrac{1}{16}$ 的大小, 并说明理由.

20. 已知数列 $\{a_n\}$ 和 $\{b_n\}$ 满足: $a_1=1$, $a_2=2$, $a_n>0$, $b_n=\sqrt{a_n a_{n+1}}$ ($n \in \mathbf{N}^*$), 且 $\{b_n\}$ 是以 q 为公比的等比数列.

(1) 证明: $a_{n+2}=a_n q^2$;

(2) 若 $c_n=a_{2n-1}+2a_{2n}$, 证明数列 $\{c_n\}$ 是等比数列;

(3) 求和: $\dfrac{1}{a_1}+\dfrac{1}{a_2}+\dfrac{1}{a_3}+\dfrac{1}{a_4}+\cdots+\dfrac{1}{a_{2n-1}}+\dfrac{1}{a_{2n}}$.

21. 在平面直角坐标系 xOy 中, 过定点 $C(0,p)$ 作直线与抛物线 $x^2=2py$ ($p>0$) 相交于 A, B 两点.

(1) 若点 N 是点 C 关于坐标原点 O 的对称点, 求 $\triangle ANB$ 面积的最小值;

(2) 是否存在垂直于 y 轴的直线 l, 使得 l 被以 AC 为直径的圆截得的弦长恒为定值? 若存在, 求出 l 的方程; 若不存在, 说明理由.